Kapitel 4

Lektion 4

Övning 4.1.
En 350 km lång, 500 kV, 50 Hz, trefas okompenserad ledning har en serie reaktans $x = 0.34\ \Omega/km$ och en shunt admittans $y = j4.5 \cdot 10^{-6}\ S/km$. Försumma förlusterna och beräkna:

a) den karaktäristiska impedansen (Surge Impedance) Z_c

b) utberedningskonstanten γ

c) våglängden λ för ledningen

d) SIL i MW

Lösning:
Vi har följande givna parametrar:

$$\begin{aligned}
&\textit{Längd:} \quad l = 350000\,\mathrm{m}\\
&\textit{Spänning:} \quad V = 500\,\mathrm{kV}\\
&\textit{Frekvens:} \quad f = 50\,\mathrm{Hz}\\
&\textit{Reaktans per km:} \quad x = 0.34\,\Omega/\mathrm{km}\\
&\textit{Admittans per km:} \quad y = i \cdot 4.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{S/km}
\end{aligned}$$

$$x = \omega L \leftrightarrow L = \frac{x}{2\pi f} = \frac{0.34}{2\pi 50} = 0.0011$$
$$y = i\omega C \leftrightarrow C = \frac{y}{i2\pi f} = \frac{i4.5 \cdot 10^{-6}}{i2\pi 50} = 1.4324 \cdot 10^{-8}$$
$$z = ix = i0.34$$

a) Beräkning av Karakteristisk Impedans Z_c

Den karakteristiska impedansen Z_c kan beräknas med följande formel:

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

Genom att sätta in värdena får vi:

$$Z_c = \sqrt{\frac{i \cdot 0.34}{i \cdot 4.5 \times 10^{-6}}} = 274.8737\,\Omega$$

```
l=350000;    %m
V=500;       %kV
f=50;        %Hz
x=0.34;      %Ohm/km
y=1i*4.5*10^(-6); %S/km

L = x/(2*pi*f)
% Output: L = 0.0011
z = 1i*x
% Output: z = 0.0000 + 0.3400i
C=y/(1i*2*pi*f)
% Output: C = 1.4324e-08
Zc = sqrt(z/y)
% Output: Zc = 274.8737
Zc = sqrt(L/C)
% Output: Zc = 274.8737

```

b) Beräkning av utebredningskonstanten γ

Propagationskonstanten γ ges av:

$$\gamma = \sqrt{zy} = i\omega\sqrt{LC} = i\beta$$

$$\gamma = \sqrt{zy} = \sqrt{i0.34 \cdot i4.5 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{i^2}\sqrt{0.34 \cdot 4.5 \cdot 10^{-6}} = i0.0012$$
$$\gamma = i\omega\sqrt{LC} = i2\pi f\sqrt{0.0011 \cdot 1.4324 \cdot 10^{-8}} = i0.0012$$

Där $\beta = Im(\gamma) = 0.0012$

c) Beräkning av våglängden γ

Våglängden kan fås av:

$$f \cdot \lambda = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{f \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

Sätter vi in värdena får vi:

$$\lambda = \frac{1}{50 \cdot \sqrt{0.0011 \cdot 1.4324 \times 10^{-8}}} = 5079.7\ m$$

d) Beräkning av SIL

SIL kan beräknas med

$$SIL = \frac{V^2}{Z_c}$$

Där den karaktäristiska impedansen beräknades i a-uppgiften.

Med insatta värden får:

$$SIL = \frac{(500 \cdot 10^3)^2}{274.8737} = 909.5086\ MW$$

Övning 4.2.
För en 300 km lång, trefas 765 kV ledningen, ta fram uttrycket för effekt. Antag $Z_c = 266.1\ \Omega$, våglängd på 5000 km, $V_{Sp.u.} = V_{Rp.u.} = 1$, och använd uttrycket för effekt som använder SIL. Beräkna sedan den så kallade stadiga stabilitetsgränsen som fås för det δ som ger maximal effektöverföring.

Lösning:
Vi har följande givna parametrar:

Längd: $l = 300\,\text{km}$

Spänning: $V = 765\,\text{kV}$

Karakteristisk impedans: $Z_c = 266.1\,\Omega$

Våglängd: $\lambda = 5000\,\text{km}$

Spänning sändare och mottagare (i p.u.): $V_{S,pu} = 1, \quad V_{R,pu} = 1$

Beräkning av SIL (Surge Impedance Loading):

$$SIL = \frac{V^2}{Z_c}\,\text{W}$$

Genom att sätta in värdena får vi:

$$SIL = \frac{765000^2}{266.1} = 2.1993 \times 10^9 \text{ W}$$

Effektöverföring: Den aktiva effekten P kan beräknas enligt:

$$P = V_{spu}V_{rpu}SIL \cdot \frac{\sin(\delta)}{\sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}$$

Maximal effektöverföring fås vid $\delta = 90°$ det vill säga $\frac{\pi}{2}$ i radianer. Detta ger effekten:

$$P = 1 \cdot 1 \cdot 2.1993 \times 10^9 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi \cdot 300000}{5000000}\right)} = 5.9742 \times 10^9 \text{ W}$$

Övning 4.3. En trefas, 50 Hz, 500 MVA, 15 kV, vattenkraftsgenerator har en H-konstant på 2.0 per enhet-sekunder.

a) Bestäm den elektriska vinkelhastigheten ω_e.

b) Sätt upp svängningsekvationen för systemet.

Systemet är initial i drift $P_{mpu} = P_{epu} = 1.0$, $\omega = \omega_e$, och $\delta = 10°$ när kortslutning till jord vid generatorns terminaler orsakar att P_{epu} sjunker till 0 för t $\geq$ 0. Antag att P_{mpu} hålls konstant 1.0 p.u. i svängningsekvationen. Bestäm effektvinkeln 3 cykler efter kortslutningen genom att följa stegen nedan.

c) Vad är effektvinkeln vid t=0 given i radianer?

d) Ställ upp svängingsekvationen för t $\geq$ 0, dvs från och med efter kortslutningen.

e) Integrera svängningsekvationen tills ett uttryck för $\delta(t)$ fås. Effektvinkeln är konstant, dvs $\frac{d\delta(0)}{dt} = 0$ vid tiden 0 och det andra begynnelsevillkoret fås från c).

f) Hur lång tid motsvarar 3 cykler? Använd det i uttrycket från e) för att ta reda på vad effektvinkeln blev efter 3 cykler.

Lösning:
Vi har följande givna parametrar:

$$\begin{aligned}
&\textit{Frekvens:} \quad f = 50\,Hz \\
&\textit{Effekt:} \quad S = 500 \times 10^6\ VA \\
&\textit{Spänning:} \quad V = 15000\ V \\
&\textit{Tröghetskonstant:} \quad H = 2\,p.u.
\end{aligned}$$

a) Den synkrona vinkelhastigheten $\omega_{e,s}$ kan beräknas enligt:

$$\omega_{e,s} = 2\pi f$$

Vilket ger:

$$\omega_{e,s} = 314.1593\, rad/s$$

b) *Svängningsekvationen ges av (se formelblad):*

$$\frac{2H}{\omega_{e,s}} \frac{d\omega_e}{dt} = P_{m,pu} - P_{e,pu}$$

Här är $P_{m,pu}$ *den mekaniska effekten i per unit (p.u.) och* $P_{e,pu}$ *den elektriska effekten.*

c) *Den initiala vinkeln* δ_0 *ges i grader och omvandlas till radianer:*

$$\delta_0 = 10^\circ = 0.1745\, radianer$$

d) *Med* $P_{mpu} = 1$ *och* $P_{epu} = 0$ *och de andra givna värdena insatt i svängningsekvationen:*

$$\frac{4}{2\pi f} \frac{d\omega_e}{dt} = 1, t \geq 0$$

e) *Felet inträffar vid* $t = 0$*, allt snurrar ihop och generatorn har* $\delta(0) = \delta_0$.

Vid $t = 0$ *är* $\omega_e = \omega_{e,s}$*. Vi kallar* $\omega_e - \omega_{e,s} = \frac{d\delta}{dt}$ *(se formelblad), dvs* $\frac{d\delta(t)}{dt} = 0$ *vid* $t = 0$.

Swing ekvationen (med $P_{e,pu} = 0$*) kan även skrivas som:*

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu}$$

Högerledet består av bara konstanter. Vi förlänger uttrycket ovan med dt och integrerar från initiala tillstånd (Tex, initialt är $\omega_e = \omega_{e,s}$ *och* $t = 0$*) till godtyckligt tillstånd (tex, upp till* ω_e *repektive* t*).*

$$\int_{\omega_{e,s}}^{\omega_e} d\omega_e = \int_0^t \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} dt$$

$$[\omega_e]_{\omega_{e,s}}^{\omega_e} = \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} [t]_0^t$$

$$\omega_e - \omega_{e,s} = \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} t$$

Eftersom $\omega_e - \omega_{e,s} = \frac{d\delta}{dt}$ *kan vi skriva det som nedan. Detta beskriver hur vinkelhastigheterna driver ifrån varandra (observera* t*-termen).*

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} t$$

Förlänger vi med dt igen och integrerar från initiala tillstånd ($\delta = \delta_0$ (som oftast är given) och $t = 0$) till godtyckligt tillstånd (upp till $\delta(t)$, och tiden upp till t som tidigare).

$$\int_{\delta_0}^{\delta(t)} d\delta = \int_0^t \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} t dt$$

$$[\delta]_{\delta_0}^{\delta(t)} = \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

$$\delta(t) - \delta_0 = \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} \frac{t^2}{2}$$

Ekvationen nedan beskriver hur vinklarna driver ifrån varandra (observera t^2-termen).

$$\delta(t) = \frac{\omega_{e,s}}{2H} P_{m,pu} \frac{t^2}{2} + \delta_0$$

Övning 4.4.
En synkrongeneratorn är initialt i drift i det stabila tillståndet med $\delta_0 = 23.95°$ och $p_{mpu} = 1$ när en tillfällig kortslutning till jord sker. Se Figur 4.1. Tre cykler senare släcks felet av sig självt. På grund av ett reläfel förblir alla kretsbrytare stängda. Avgör om stabiliteten bibehålls eller inte och bestäm den maximala effektvinkeln. Tröghetskonstanten för generatornheten H=3.0 per enhet-sekunder på systembasen. Antag att p_{mpu} förblir konstant under störningen. Antag också att $\omega_{pu}(t) = 1.0$ i svängningsekvationen. $p_{epu} = p_{max}\sin(\delta) = 2.4628\sin(\delta)$ per enhet.

a) Börja med att sätta upp svängingsekvationen och integrera den för att få fram ett uttryck för $\delta(t)$. Bestäm δ_1, det vill säga vad blir effektvinkeln efter 3 cykler?

b) Bestäm accelerationsarean AA=A_1. Se Figur 4.1.

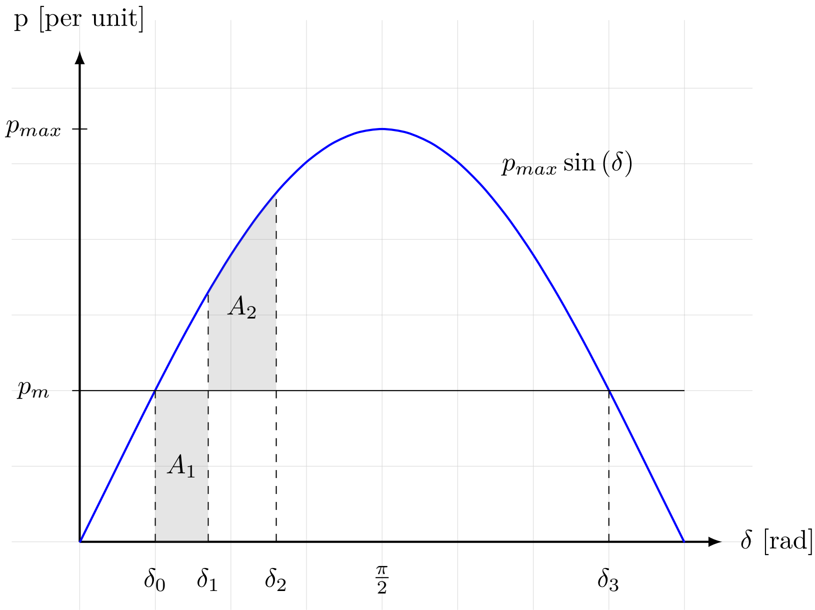
c) Bestäm δ_2 med hjälp av "equal-area"kriteriet. Testa med $\delta_2 = 40.23$, 42.87, 41.86 grader.

d) Förklara varför stabiliteten bibehålls eller inte.

Lösning:
Vi har fått initialvillkoren och konstanterna för uppgiften. Den initiala vinkeln δ_0 är:

$$\delta_0 = 23.95° = 0.4180\, radianer$$

Vi har även följande systemparametrar:
Tröghetskonstant $H = 3\,pu$
Frekvens $f = 50\,Hz$
Systemet körs under 3 cykler, vilket gör att vi kan beräkna tidsintervallet:



Figur 4.1: Figur till Övning 4.4.

$$t = \frac{cykler}{f} = \frac{3}{50} = 0.0600\,sekunder$$

a) *Använd*

$$\frac{2H}{\omega_{e,s}}\frac{d^2\delta_e}{dt^2} = P_{mpu}$$

för att beräkna den uppdaterade vinkeln δ_1 vid tidpunkten t:

$$\delta_1 = \frac{2\pi f}{4H}t^2 + \delta_0$$

Genom att sätta in de givna värdena:

$$\delta_1 = \frac{2\pi \times 50}{4 \times 3} \times (0.0600)^2 + 0.4180$$

Efter att ha utfört beräkningen får vi:

$$\delta_1 = 0.5123\,radianer = 29.35°$$

b) *Accelerationsarean A_1 från den initiala vinkeln δ_0 till δ_1:*

$$A_1 = (\delta_1 - \delta_0)P_{mpu} = (0.5123 - 0.4180) \cdot 1 = 0.0942\,radianer$$

c) *För att beräkna δ_2 kan vi använda följande:*

$$p_{epu} = 2.4638 \sin \delta = p_{max} \sin \delta$$

$$A_2 = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (p_{epu} - p_{mpu})\, d\delta = A_1$$

$$A_1 = p_{max} [-\cos \delta]_{\delta_1}^{\delta_2} - [\delta]_{\delta_1}^{\delta_2}$$

$$p_{max} \cos \delta_1 + \delta_1 - A_1 = p_{max} \cos \delta_2 + \delta_2$$

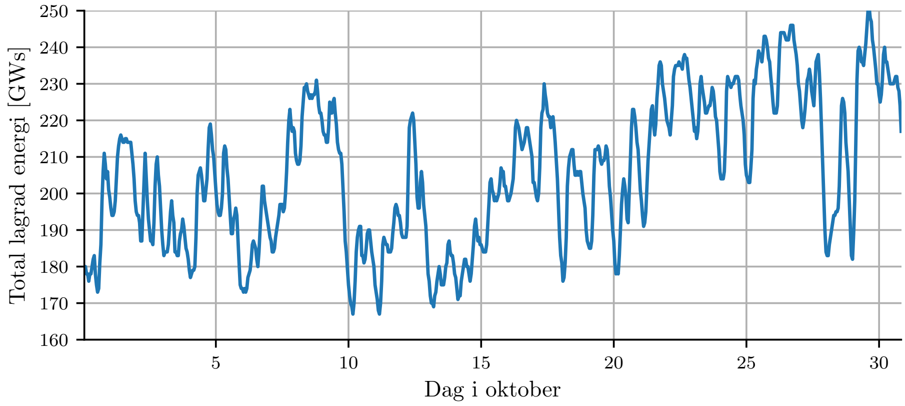
Testa sätta in den givna vinklarna på δ_2 *och se vilken som bäst löser ekvationen. Alternativt kan man använda matlab för att lösa ekvationen. Se nedan.*

```
% ----- ALT 1 ------
% Use fsolve() to solve the equation
% Define the function
equation = @(x) p_max * cos(x) + x - delta1 -
p_max * cos(delta1) + A1;

% Initial guess
initial_guess = 0.7;

% Solve the equation
solution = fsolve(equation, initial_guess);

% The solution will be shown as:
% solution = 0.7306
delta2 = rad2deg(solution) % = 41.86

```

```
% ----- ALT 2 ------
delta2= deg2rad(41.23);
p_max * cos(delta2) + delta2 - delta1 - p_max*cos(
delta1) + A1

ans = 0.0070

delta2= deg2rad(42.87);
p_max * cos(delta2) + delta2 - delta1 - p_max*cos(
delta1) + A1

ans = -0.0116

delta2= deg2rad(41.86);
p_max * cos(delta2) + delta2 - delta1 - p_max*cos(
delta1) + A1

ans = 2.0271e-05
```

Vinkeln $\delta_2 = 41.86°$ passar bäst.

Övning 4.5.
I Figur 4.2 visas den lagrade energin i det nordiska elnätet under oktober månad 2023. Som man kan se så varierar energin mellan ungefär 170 GWs och 250 GWs och i denna uppgift ska vi undersöka hur nätets stabilitet påverkas av nivån på den lagrade energin.



Figur 4.2: Figur till Övning 4.5. Lagrad energi i det nordiska elnätet under oktober månad 2023. Datan är hämtad från finlands stamnätsbolag Fingrid.[1]

a) Under normala förhållanden så roterar alla massor i elnätet med, eller nära, basfrekvensen $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi 50$ Hz, och den totala energin kan skrivas

$$W_{tot} = \sum_k \frac{1}{2} J_{tot} \omega_s^2 \tag{4.1}$$

Antag att vid ett visst tillfälle så är $W_{tot} = 200$ GW och nätet roterar med basfrekvensen 50 Hz. Vad skulle den totala energin bli om nätet istället roterade med de två gränsvärdena 49.9 Hz samt 50.1 Hz, givet att J_{tot} är konstant? Hur stor del av variationerna i total energi under oktober månad skulle kunna förklaras av variationer i nätets frekvens?

b) Vi ska nu titta på ett betydligt kortare tidsintervall, under vilket effektbalansen

$$\frac{dW_{tot}}{dt} = P_{m,tot} - P_{e,tot}$$

råder, där $P_{m,tot}$ den totala mekaniska effekten som driver varje synkronmaskin, och $P_{e,tot}$ är den totala konsumerade elektriska effekten. Antag att $P_{e,tot}$ är konstant under hela förloppet och att det initialt råder balans så att $P_{m,tot} - P_{e,tot} = 0$, men att vid en viss tidpunkt så kopplas ett kärnkraftverk bort så att $P_{m,tot}$ minskar med effekten $P_{plant} = 2$ GW

[1] https://www.fingrid.fi/en/electricity-market-information/InertiaofNordicpowersystem/

som kärnkraftverket producerar. Övriga effekter antas inte påverkas utan hålls konstanta (ingen reglering för att stabilisera nätet). Hitta ett uttryck för hur W_{tot} förändras efter det att kärnkraftverket kopplas bort, som funktion av tiden t från att det kopplades bort samt initiala energin W_{tot}^0 ($W_{tot}(t=0) = W_{tot}^0$).

c) Använd uttrycket från b) för att bestämma hur lång tid det skulle ta innan frekvensen går utanför gränsvärdena i a) givet att den initiala lagrade energin är 170 GW och 250 GW (två separata beräkningar). Antag att J_{tot} konstant (men olika i de två fallen) så att (4.1) kan användas. Ett tipps är att först beräkna hur mycket W_{tot} får förändras innan begränsningarna nås.

d) I c) antog vi att J_{tot} var konstant under hela förloppet, vilket inte är helt rimligt då J_{tot} måste minska när kärnkraftverk kopplas bort. Vi ska nu undersöka hur stor inverkan på resultatet detta har genom att titta på hur mycket energi kärnkraftverk bidrar med. Den totala lagrade energin kan skrivas som en summa av bidraget från varje enskild roterande massa J_k i nätet som

$$W_{tot} = \sum_k \frac{1}{2} J_k \omega_s^2. \tag{4.2}$$

och vi antar att kärnkraftverk har tröghetskonstanten

$$H = \frac{1}{2} \frac{J_{plant}\omega_s^2}{S_{base}} = 5 \text{ s}$$

samt märkeffekten $S_{base} = 3$ GW. Beräkna kärnkraftverkets bidrag till den totala lagrade energin samt hur stor andel av den totala det motsvarar i datan från oktober månad. Borde vi ha tagit hänsyn till kärnkraftverkets bidrag i c)?

Lösning:

a)

$$W_{tot}(\omega) = \sum_k \frac{1}{2} J_{tot}\omega^2 = \sum_k \frac{1}{2} J_{tot}\omega_s^2 \frac{\omega^2}{\omega_s^2} = W_{tot}(\omega_s)\frac{\omega^2}{\omega_s^2}$$

$$W_{tot}(49.9Hz) = W_{tot}(\omega_s)\frac{49.9^2}{50^2} = 199.20$$

$$W_{tot}(50.1Hz) = W_{tot}(\omega_s)\frac{50.1^2}{50^2} = 200.80$$

Acceptabla variationer i frekvensen leder till väldigt små förändringar i lagrad energi.

b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW_{tot}}{dt} &= -S_{plant} \\ W_{tot}(0) &= W_{tot}^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_{tot}(t) = W_{tot}^0 - tS_{plant}$$

c) Från a) får vi att den totala energin kan sjunka som mest

$$W_{tot}^0 - W_{tot}^0 \frac{49.9^2}{50^2} \tag{4.3}$$

utan att frekvensen går under 49.9 Hz. Från b) får vi att den totala energin sjunker med P_{plant} *GWs per sekund och därmed kan kärnkraftverk som mest vara bortkopplad*

$$t = \frac{W_{tot}^0 - W_{tot}^0 \frac{49.9^2}{50^2}}{P_{plant}} = \begin{cases} 0.34\ s, & W_{tot}^0 = 170\ GWs \\ 0.50\ s, & W_{tot}^0 = 250\ GWs \end{cases}$$

d)

$$\frac{1}{2} J_{plant} \omega_s^2 = H S_{base} = 5 S_{base} = 15\ GWs$$

kärnkraftverk står för mellan $\frac{15}{170} \approx 8\%$ *och* $\frac{15}{250} = 6\%$*. När kärnkraftverket kopplas bort minskar alltså totala energin med 6-8% vilket motsvarar att förloppet går 6-8% snabbare än beräkningarna i c).*