

Vehicle Dynamics and Control

Lecture 8

The lectures

- Tyre modelling
- Longitudinal dynamics and control
- Lateral dynamics and control
- Vertical dynamics and control
- Stability and control
- Applications

Today's lecture

- Lateral dynamics: Stability of an inclined caster
- Vertical dynamics: Pitch and bounce
- Vertical dynamics: The quarter car model
- Vertical dynamics: Comfort and vibrations
- Vertical dynamics: Active and semi-active suspensions
- Vertical dynamics: Non-linear dampers

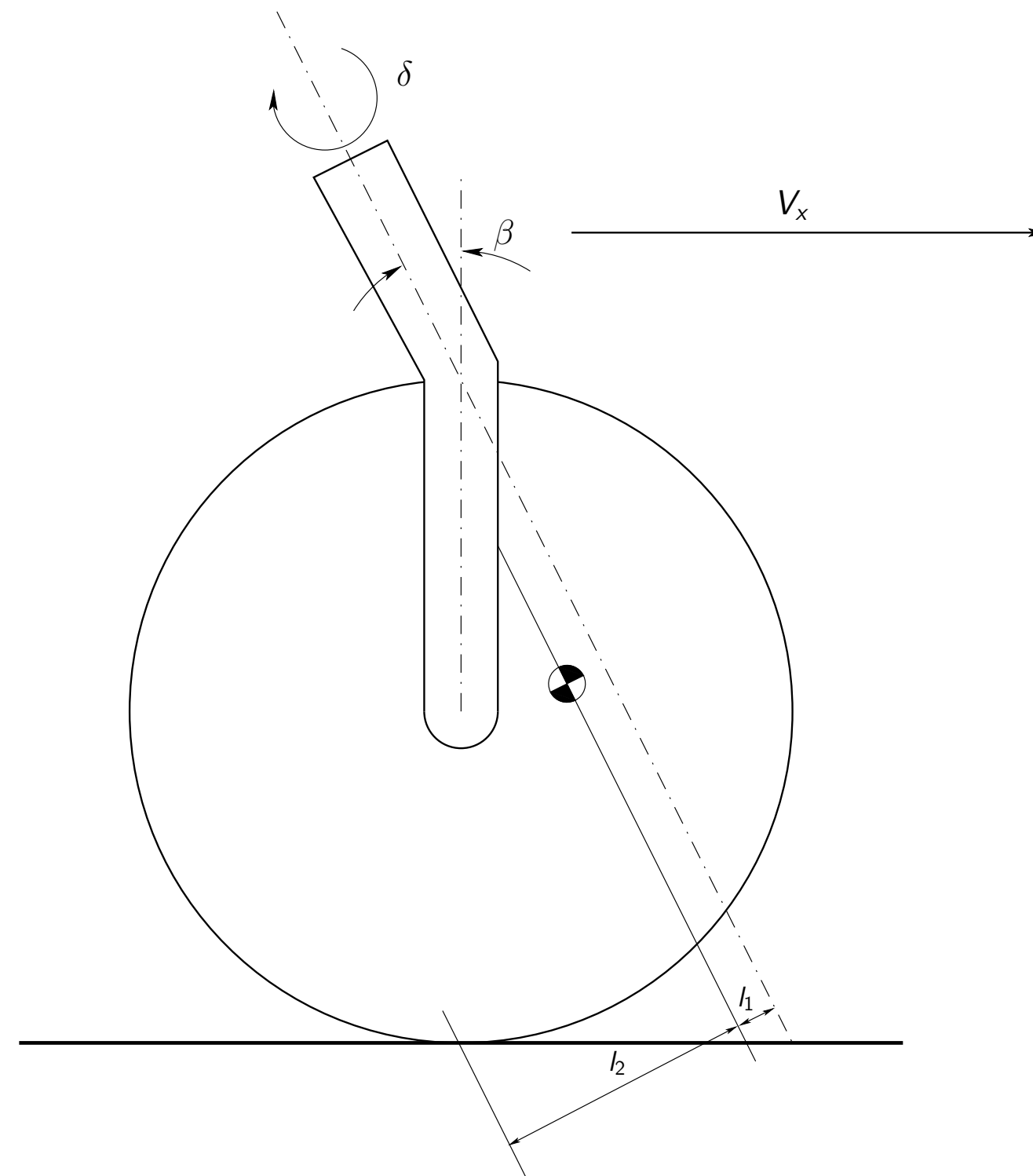
Stability of an inclined axis caster

Stability of an inclined axis caster



Stability of inclined axis caster

We shall study the stability of the following system:



where β is the rake angle and δ is the steer angle.

Stability of inclined axis caster

First some geometry. Start with a vertical steer axis and a wheel axis that is pointing in the y -direction.



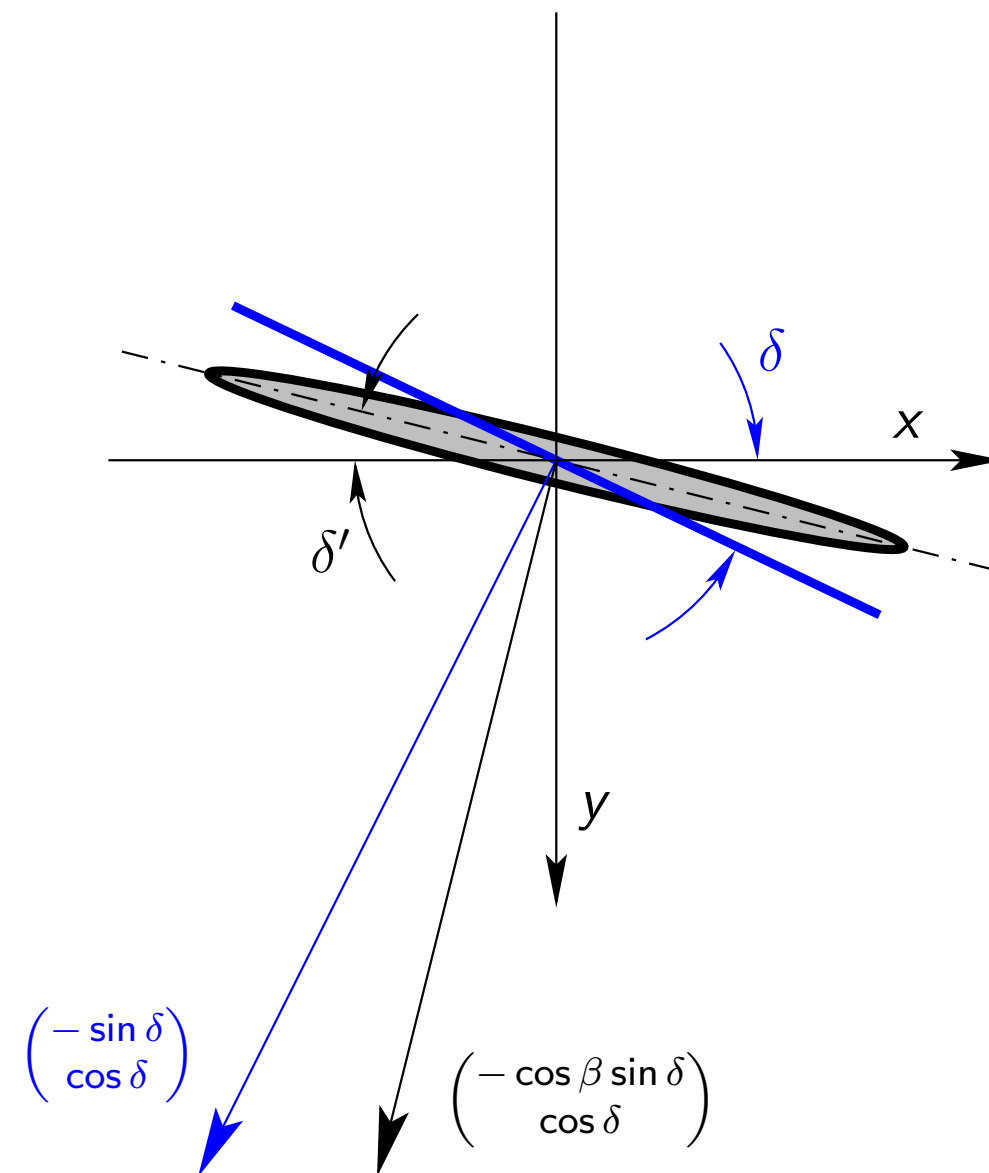
First rotate the wheel δ about the steer axis and then β about the y -axis to reach the final position.

The direction of the wheel axis then becomes:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \beta \sin \delta \\ \cos \delta \\ -\sin \beta \sin \delta \end{pmatrix}$$

Stability of inclined axis caster

Wheel and direction of wheel axle seen from above after the first (blue) and second rotation (black):



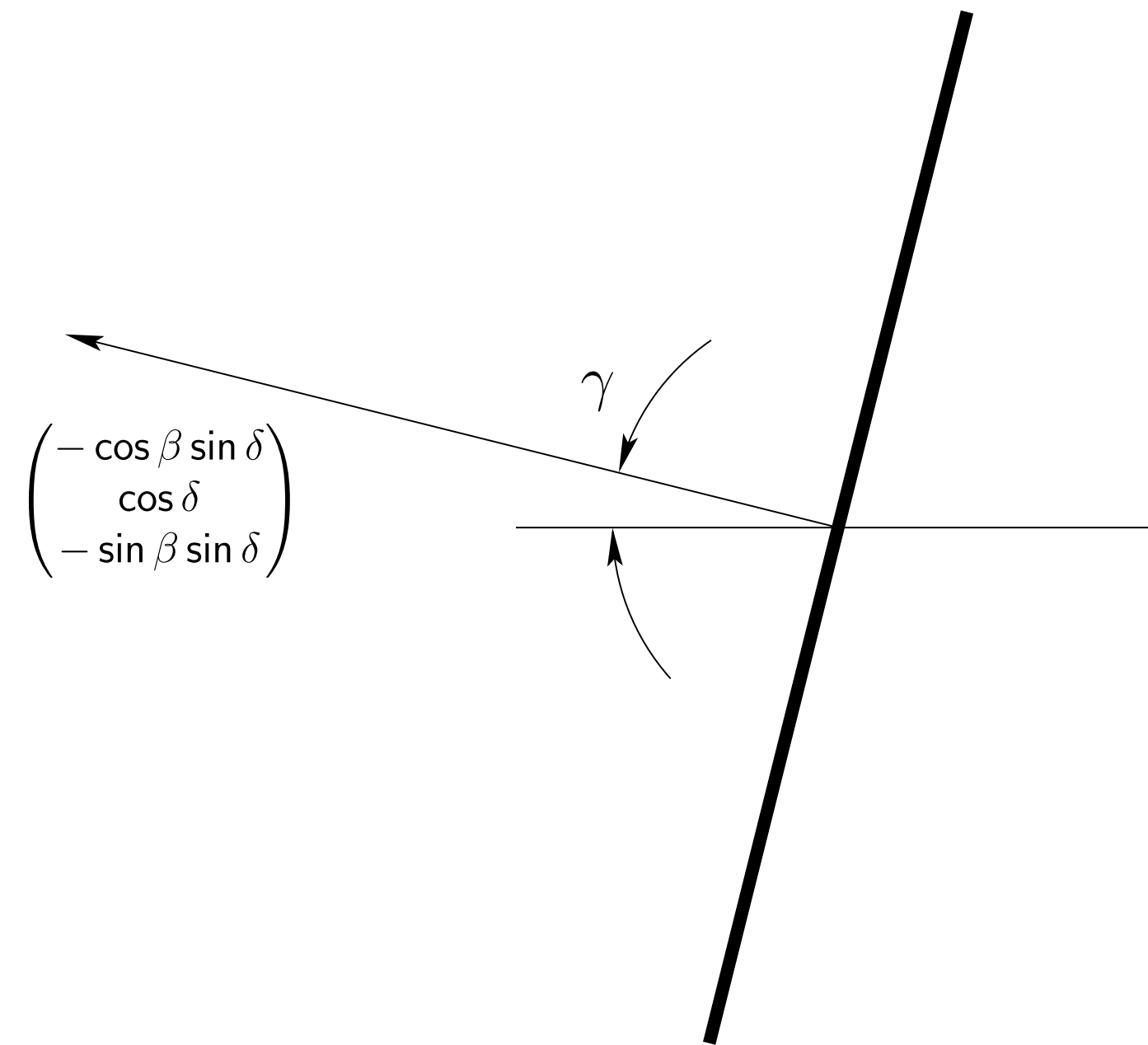
The direction of the wheel axis:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \beta \sin \delta \\ \cos \delta \\ -\sin \beta \sin \delta \end{pmatrix}$$

$$\text{Relation for angle on ground plane } \delta': \tan \delta' = \frac{\cos \beta \sin \delta}{\cos \delta}, \quad \delta' \approx (\cos \beta) \delta$$

Stability of inclined axis caster

Wheel and direction of wheel axle seen from the front:



$$\begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \beta \sin \delta \\ \cos \delta \\ -\sin \beta \sin \delta \end{pmatrix}$$

Relation for camber angle γ : $\gamma \approx (\sin \beta)\delta$

Stability of inclined axis caster

There are two contribution to the slip angle:

$$\alpha = (\cos \beta)\delta + \frac{(l_1 + l_2)\dot{\delta}}{V_x}$$

The first is δ' from a previous slide and the second is due to the angular speed $\dot{\delta}$.

The total lateral force at the contact is

$$F_y = C_\alpha \alpha + C_\gamma \gamma = C_\alpha ((\cos \beta)\delta + (l_1 + l_2)\dot{\delta}/V_x) + C_\gamma (\sin \beta)\delta$$

where C_α and C_γ cornering and camber stiffness, respectively.

The model for the system is

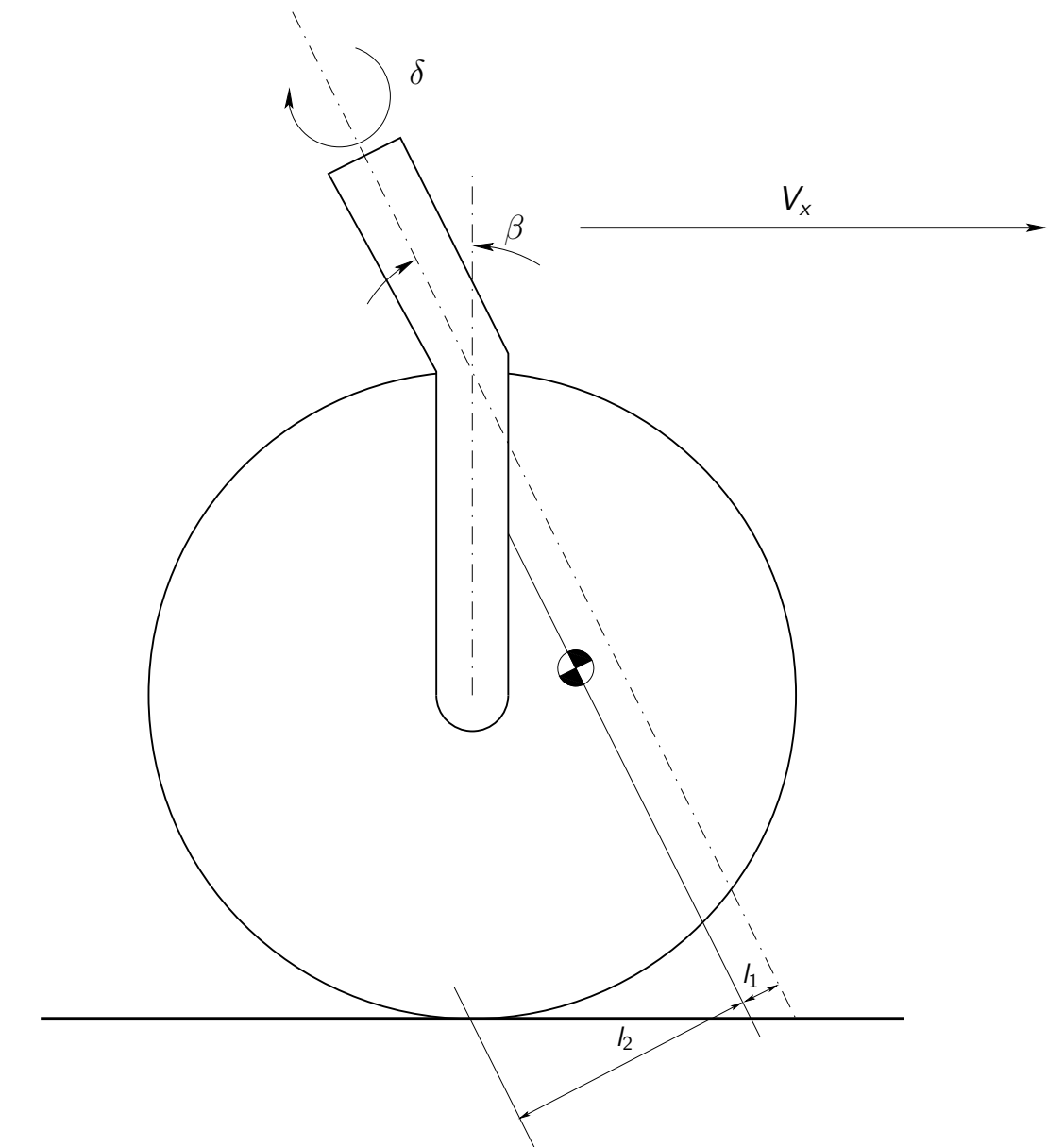
$$(I_y + ml_1^2)\ddot{\delta} + C_\alpha((l_1 + l_2)^2/V_x)\dot{\delta} + (C_\alpha \cos \beta + C_\gamma \sin \beta)(l_1 + l_2)\delta = 0$$

The characteristic equation has complex solutions if

$$V_x > V_{lim} = \dots$$

and V_{lim} increases as the rake angle β increases.

$$\delta' \approx (\cos \beta)\delta$$



Pitch and Bounce

Hopp- och nickrörelser

Studerar det dynamiska systemet i figur 7.7.

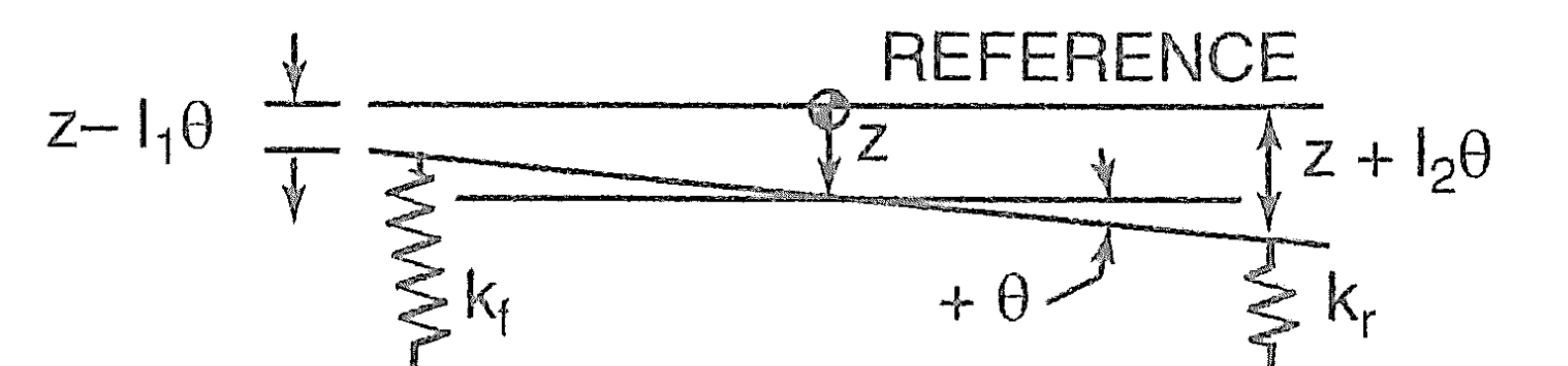
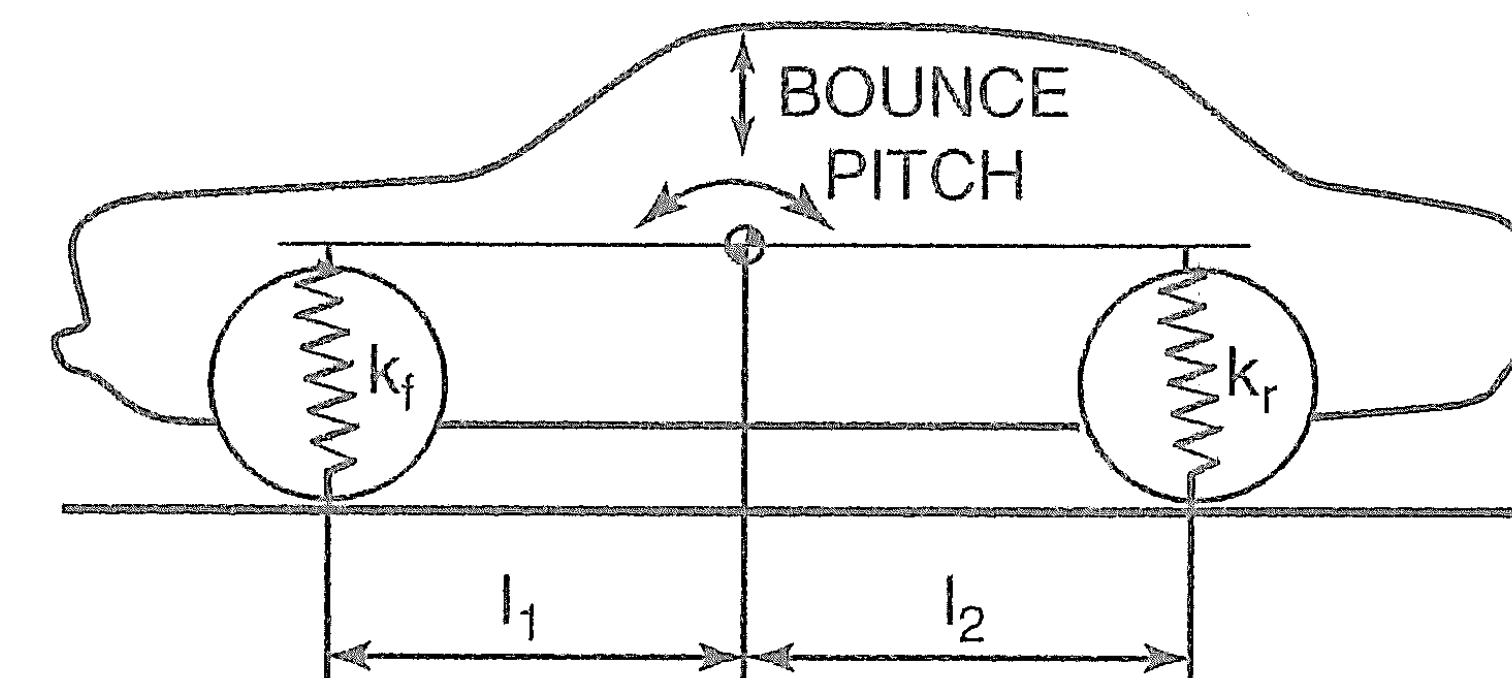
$$m_s \ddot{z} + k_f(z - l_1\theta) + k_r(z + l_2\theta) = 0$$

$$I_y \ddot{\theta} - k_f l_1(z - l_1\theta) + k_r l_2(z + l_2\theta) = 0$$

där

$$I_y = m_s r_y^2$$

och r_y kallas för tröghetsradien.



Hopp- och nickrörelser

Genom att införa beteckningarna

$$D_1 = \frac{k_f + k_r}{m_s}$$

$$D_2 = \frac{k_r l_2 - k_f l_1}{m_s}$$

$$D_3 = \frac{1}{I_y} (k_f l_1^2 + k_r l_2^2) = \frac{1}{m_s r_y^2} (k_f l_1^2 + k_r l_2^2)$$

får vi

$$\ddot{z} + D_1 z + D_2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{D_2}{r_y^2} z + D_3 \theta = 0$$

som kan skrivas på formen

$$\ddot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix}$$

Hopp- och nickrörelser

Eigenfrekvenser och egenvärden kan beräknas som tidigare genom att ansätta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} = \cos(\omega t) \begin{pmatrix} \hat{Z} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix}$$

Karakteristisk ekvation för systemet blir då

$$\omega_n^4 - (D_1 + D_3)\omega_n^2 + \left(D_1 D_3 - \frac{D_2^2}{r_y^2} \right) = 0$$

Egenvektorerna ges av systemet

$$(D_1 - \omega_n^2)\hat{Z} + D_2\hat{\theta} = 0$$

$$\frac{D_2}{r_y^2}\hat{Z} + (D_3 - \omega_n^2)\hat{\theta} = 0$$

Hopp- och nickrörelser

Den första ekvationen $(D_1 - \omega_n^2)\hat{Z} + D_2\hat{\theta} = 0$ ger sambandet

$$\frac{\hat{Z}}{\hat{\theta}} = \frac{D_2}{\omega_n^2 - D_1}$$

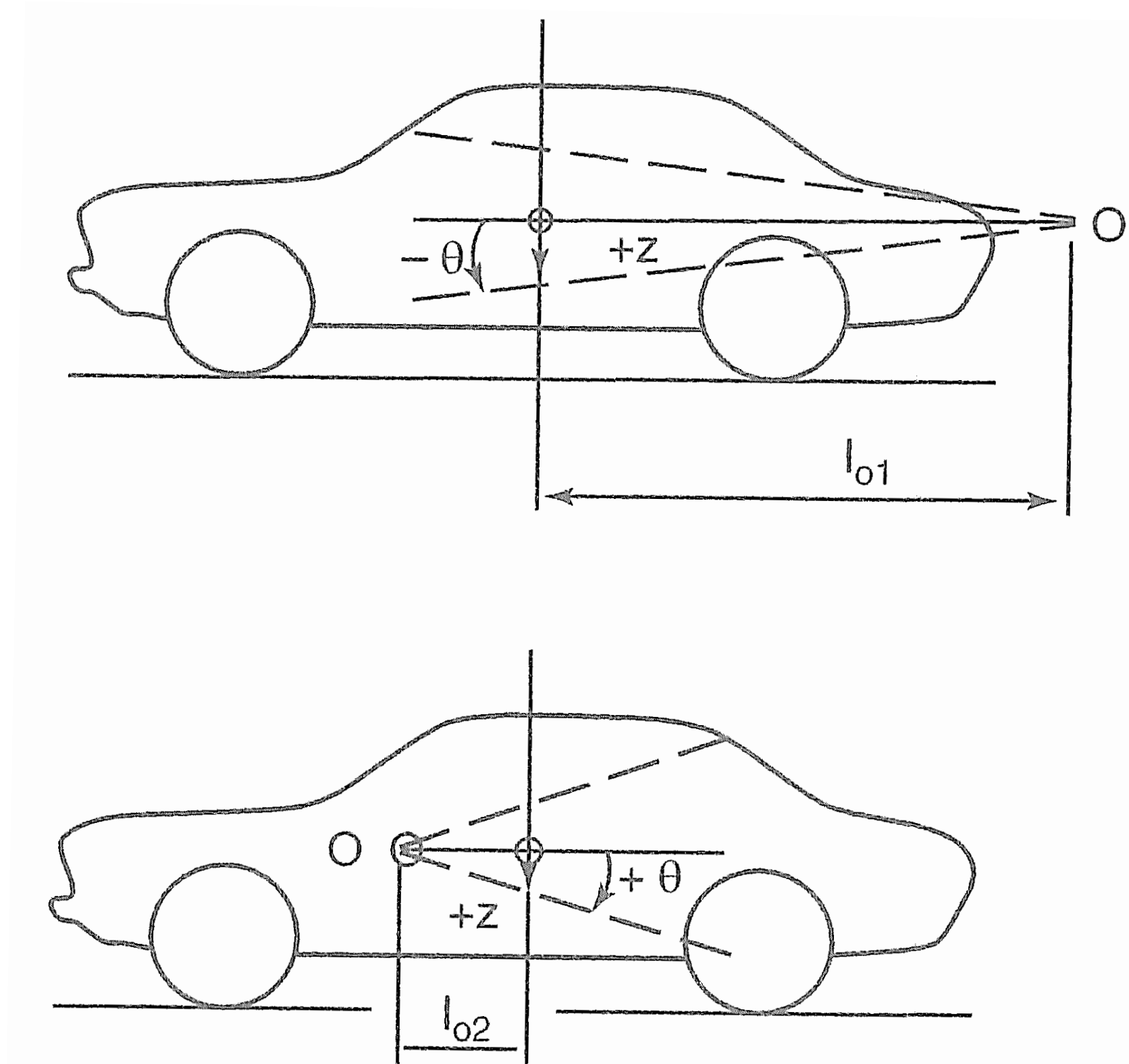
Kvoten ger avståndet mellan tyngdpunkten och centrum för oscillationen för de två egenmoderna, se figur 7.19.

Det går att visa att nämnaren $\omega_n^2 - D_1$ är negativ för den lägre frekvensen och positiv för den högre.

Tecknet på täljaren

$$D_2 = \frac{1}{m_s}(k_r l_2 - k_f l_1)$$

beror på fjädrarnas styvhet och tyngdpunktens läge.



Hopp- och nickrörelser: Två specialfall

Om

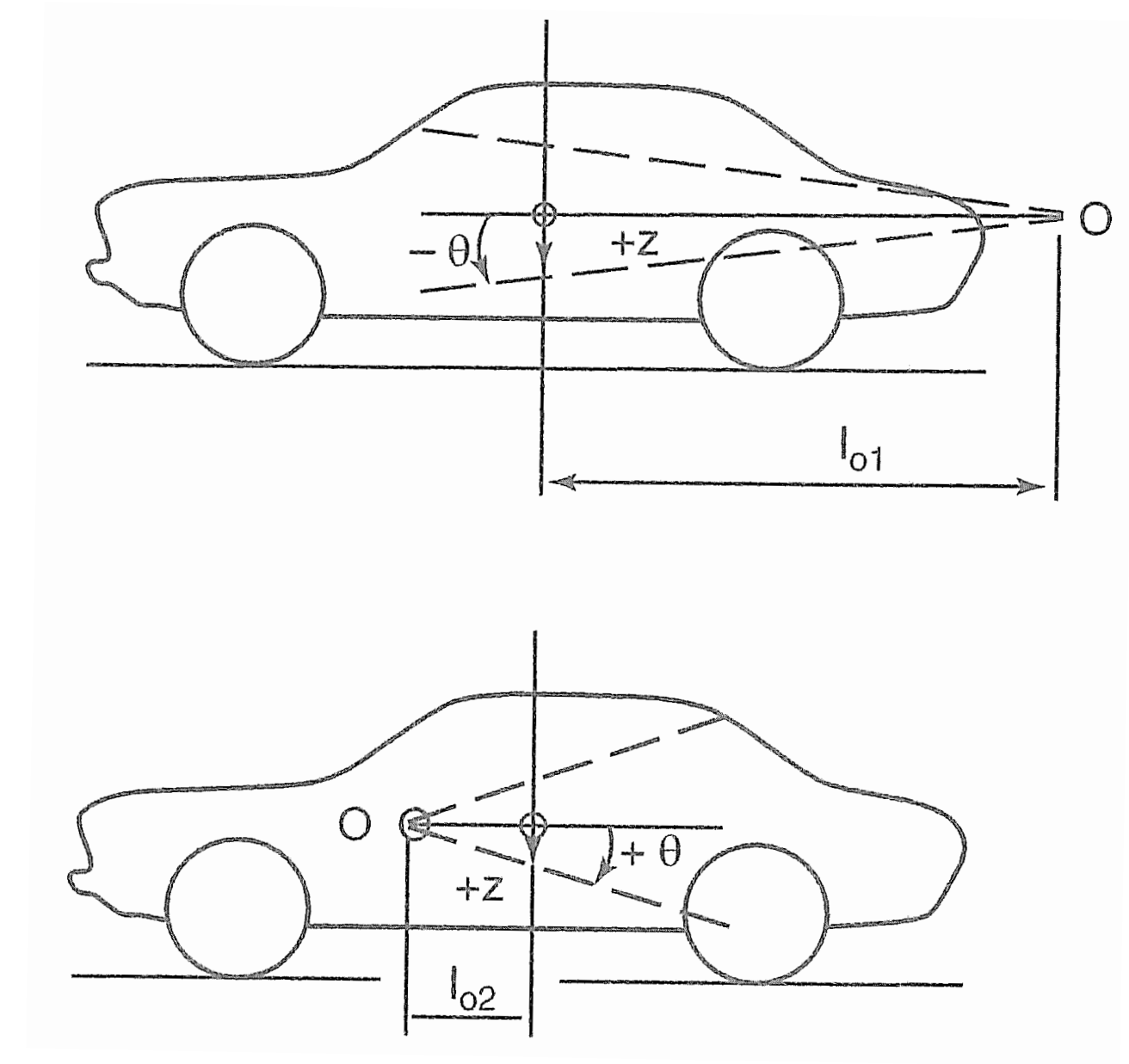
$$D_2 = \frac{1}{m_s}(k_r l_2 - k_f l_1) = 0$$

så är systemet

$$(D_1 - \omega_n^2)\hat{Z} + D_2\hat{\theta} = 0$$

$$\frac{D_2}{r_y^2}\hat{Z} + (D_3 - \omega_n^2)\hat{\theta} = 0$$

okopplat och rörelsen kan delas upp i en ren vertikal oscillation och en roterande oscillation med centrum i tyngdpunkten.



Hopp- och nickrörelser: Två specialfall

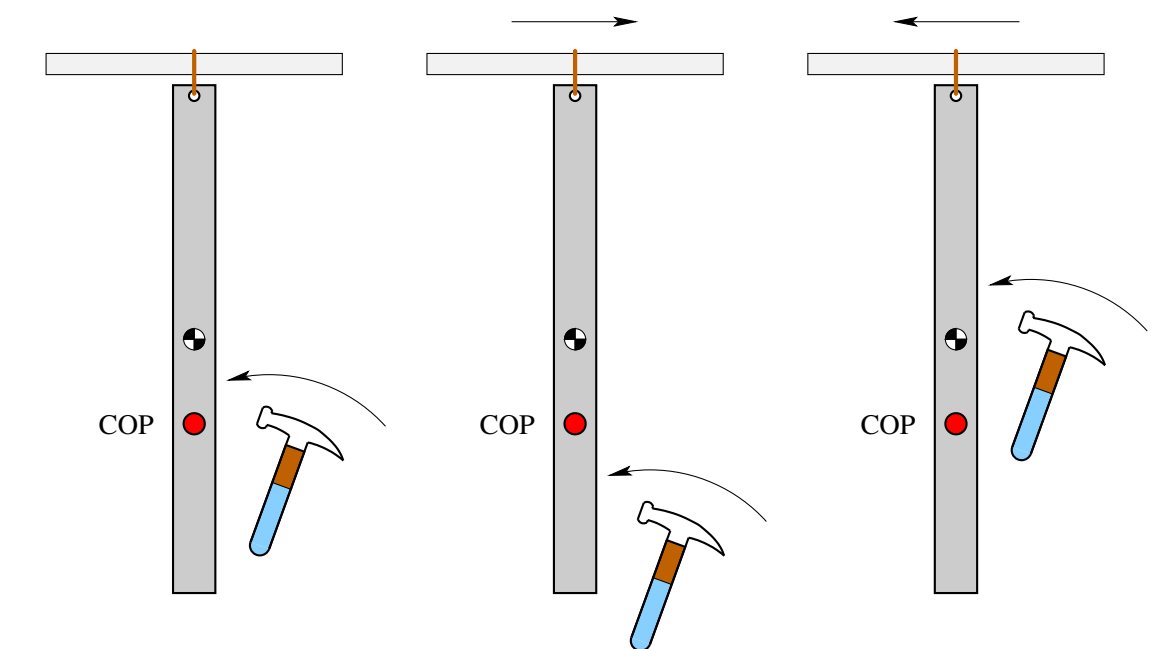
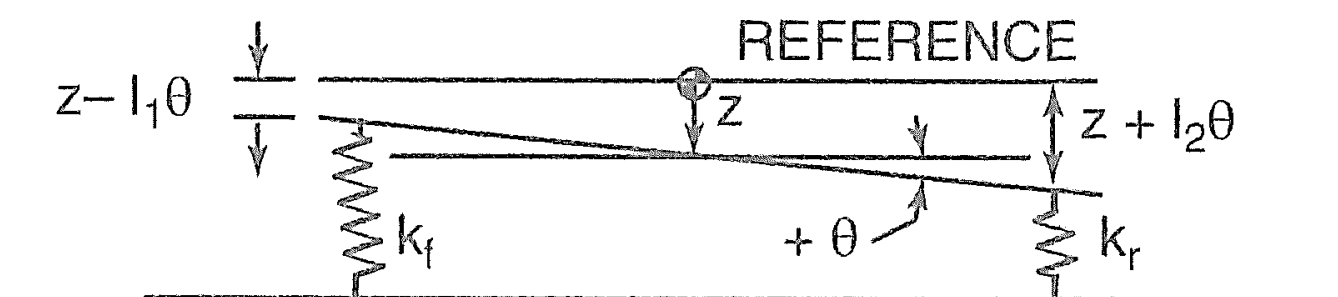
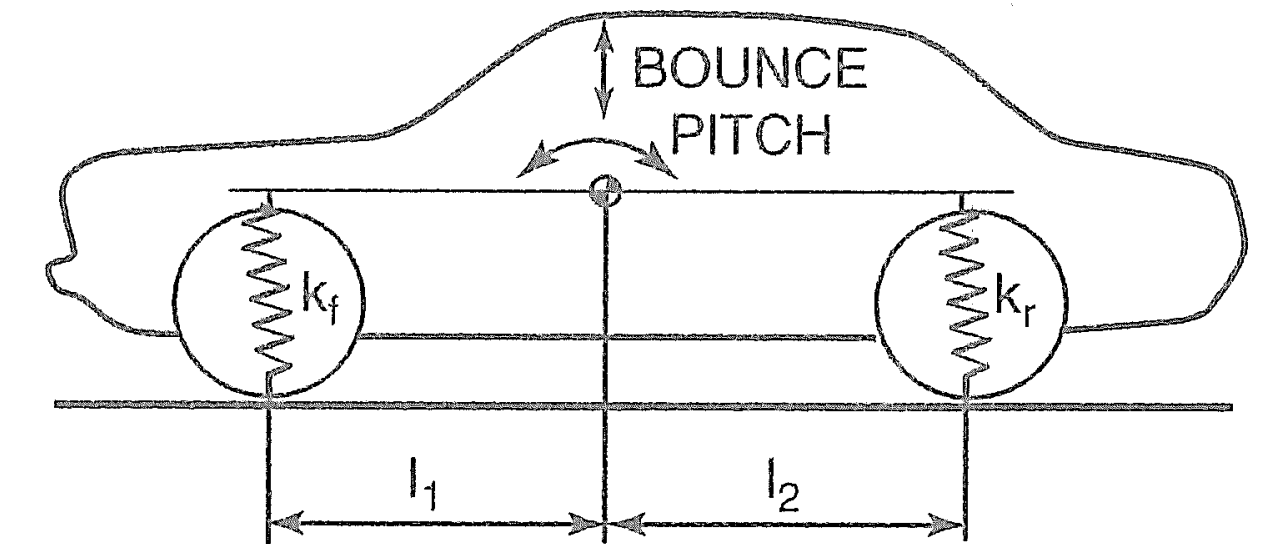
Det andra intressanta specialfallet är då

$$I_y = ml_1l_2$$

d.v.s. stötcentrum (COP) m.a.p. främre hjulaxeln ligger vid bakre hjulaxeln och tvärtom.

Centrum för oscillationerna ligger då vid främre resp. bakre hjulaxeln.

I detta fall är systemet ekvivalent med ett okopplat system med massan $m_s l_2 / L$ fram och massan $m_s l_1 / L$ bak.



Comfort and Vibrations

Komfort: Exempel på komfortkriterium

Janeways komfortkriterium anger gränser för amplituden A för en vertikal harmonisk svängning med frekvensen f :

I frekvensintervallet 1-6 Hz är det maximala ”knycket” som begränsar:

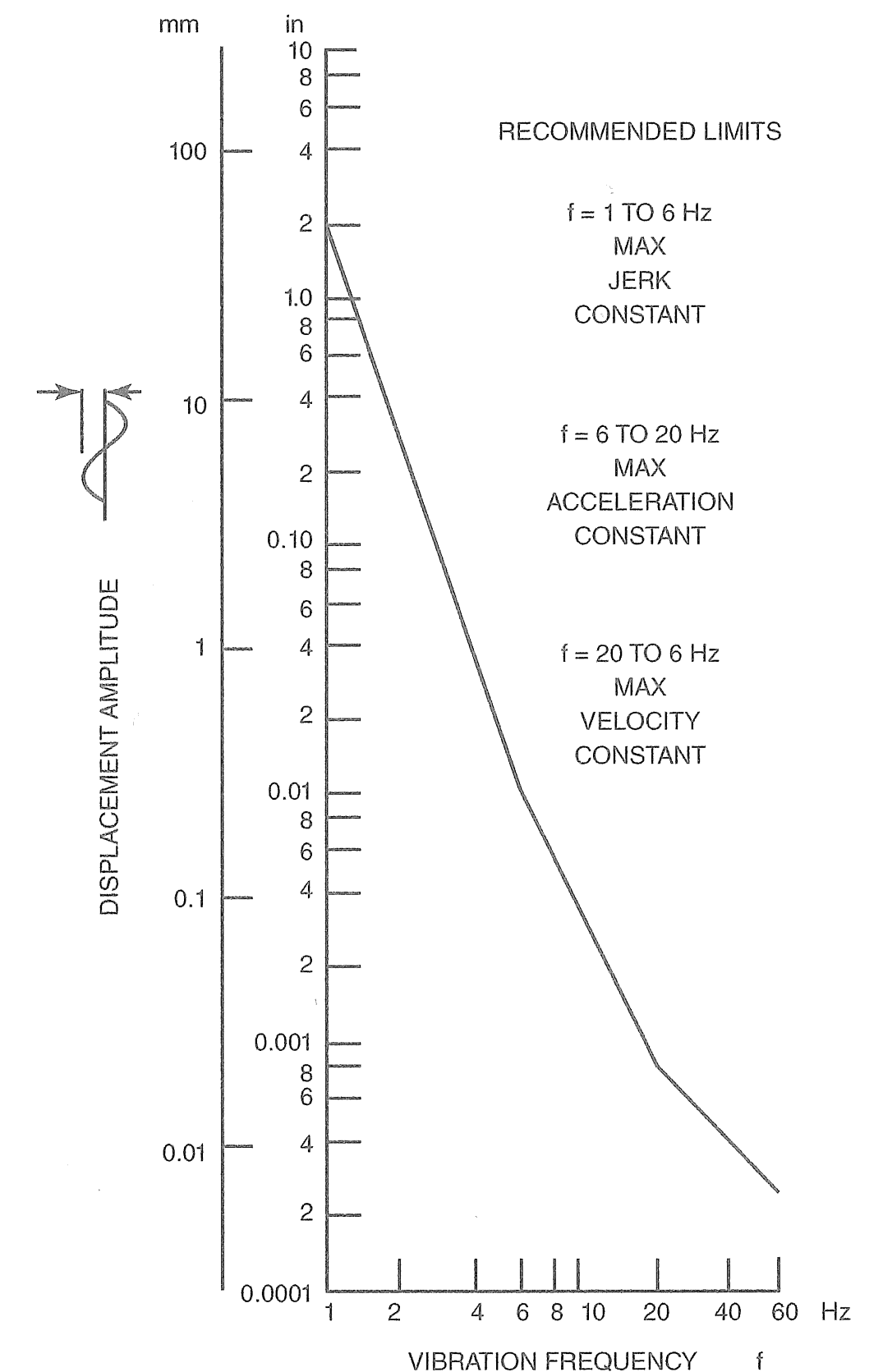
$$A\omega^3 \leq 12.6 \text{ m/s}^3$$

I frekvensintervallet 6-20 Hz är det maximala acceleration som begränsar:

$$A\omega^2 \leq 0.33 \text{ m/s}^2$$

I frekvensintervallet 20-60 Hz är det maximala hastigheten som begränsar:

$$A\omega \leq 2.7 \text{ mm/s}$$

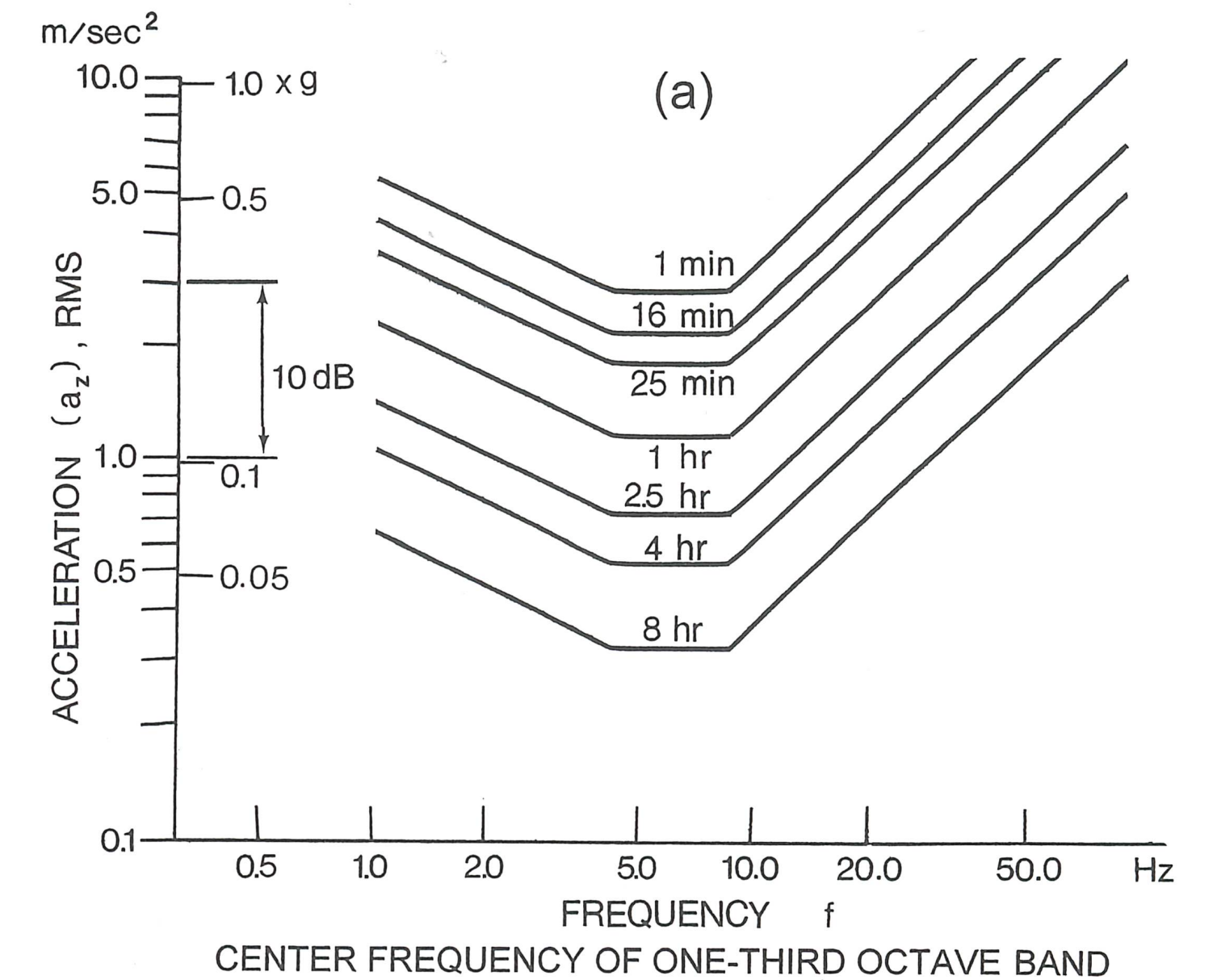


Komfortkriterier

Komfortkriterier kan delas in i olika nivåer:

- Säkerhet och hälsa.
- Utmattning och prestationsförmåga.
- Möjlighet att t.ex. läsa, skriva och äta.

Figur 7.2 ger exempel på lämpliga gränser för det kvadratiska medelvärdet av accelerationen om vi betraktar det andra fallet.



Vägprofil

För en icke-harmonisk vägprofil $z(x)$ används ofta spektraltäthet istället för amplitud:

$$S_g(\Omega) = |Z(i\Omega)|^2$$

där $Z(i\omega)$ betecknar fouriertransformen och Ω är spatial frekvens med enheten [cykler/m].

Det kvadratiska medelvärdet av z ges av

$$\bar{z}^2 = \int_0^\infty S_g(\Omega) d\Omega$$

givet att vi har valt en lämplig definition av transformen.

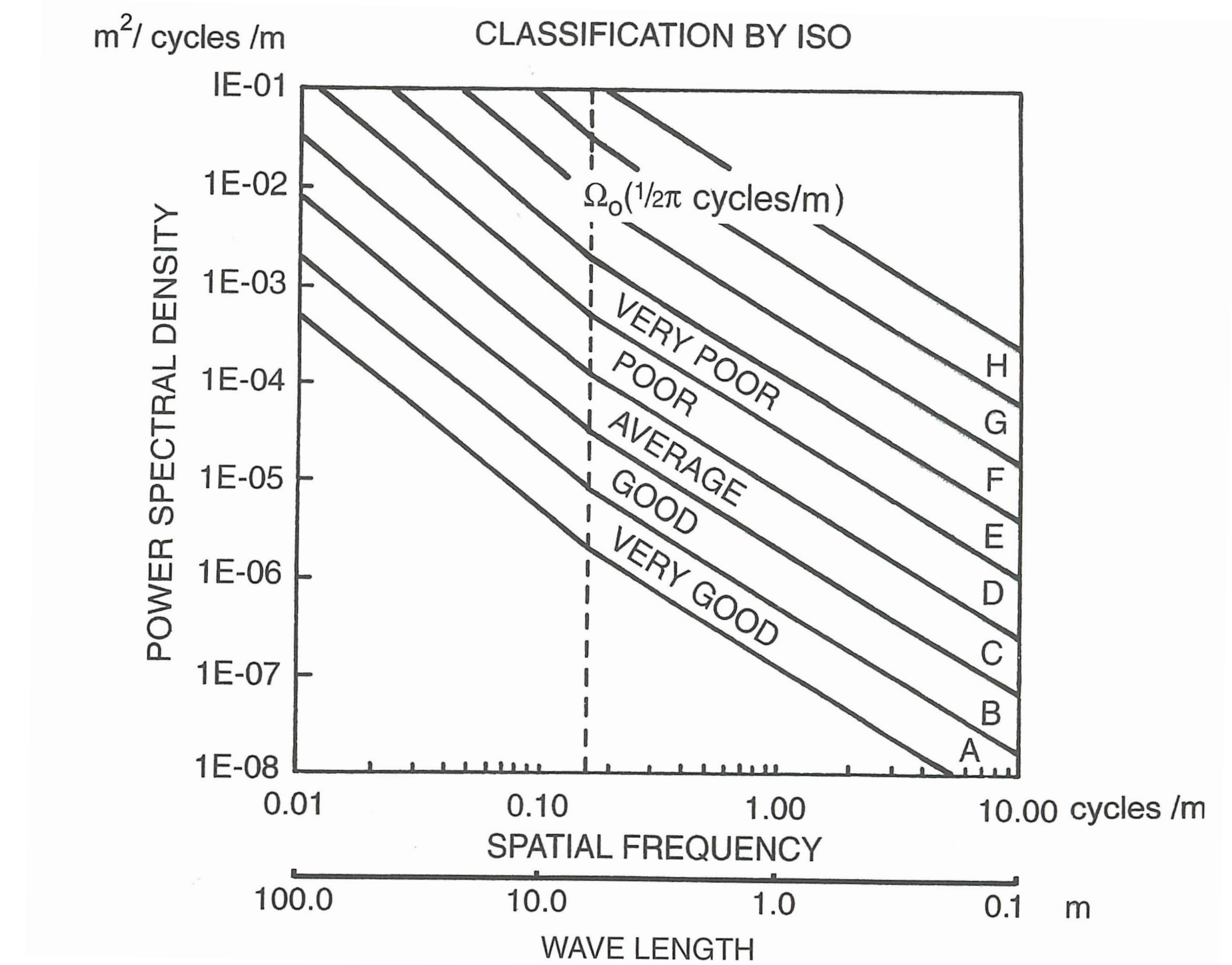
Empiriska modeller för S_g

En empirisk modell visas i figur 7.29:

$$S_g(\Omega) = S_g(\Omega_0)(\Omega/\Omega_0)^2 \quad \text{för } \Omega \leq \Omega_0$$

$$S_g(\Omega) = S_g(\Omega_0)(\Omega/\Omega_0)^{3/2} \quad \text{för } \Omega > \Omega_0$$

där $\Omega_0 = 1/2\pi$ och $S_g(\Omega_0)$ ges av tabell 7.3.



Frekvenssamband

Om bilen håller hastigheten V med spatial frekvens Ω ges frekvensen f av sambandet

$$f[\text{Hz}] = \Omega[\text{cykler/m}]V[\text{m/s}]$$

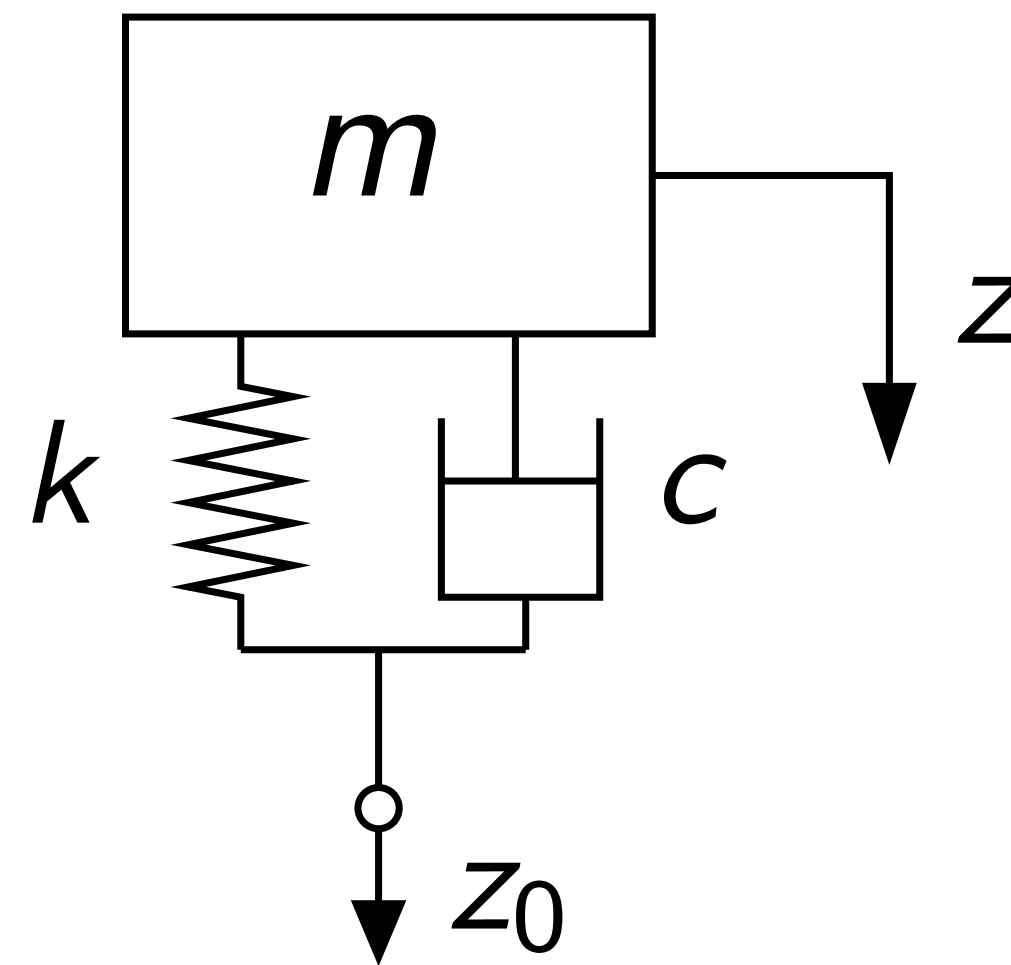
Sambandet mellan spektraltätheterna ges av

$$S_g(f) = \frac{S_g(\Omega)}{V}$$

Givet en vägprofil med spektraltäthet $S_g(f)$ och en hastighet V så kommer detta resultera i att den fjädrade massan vibrerar.

Frekvenssvar

För enkelhetens skull studerar vi en kvartsbilsmodell med en frihetsgrad.



Matematisk modell för systemet:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = c\dot{z}_0 + kz_0$$

Frekvenssvar

Genom att införa dämpfaktorn

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

och den naturliga vinkelhastigheten

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

kan differentialekvationen

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = c\dot{z}_0 + kz_0$$

skrivs

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z = 2\zeta\omega_n\dot{z}_0 + \omega_n^2z_0$$

Frekvenssvar

Genom att transformera differentialekvationen får vi

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Z(s) = (2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Z_0(s)$$

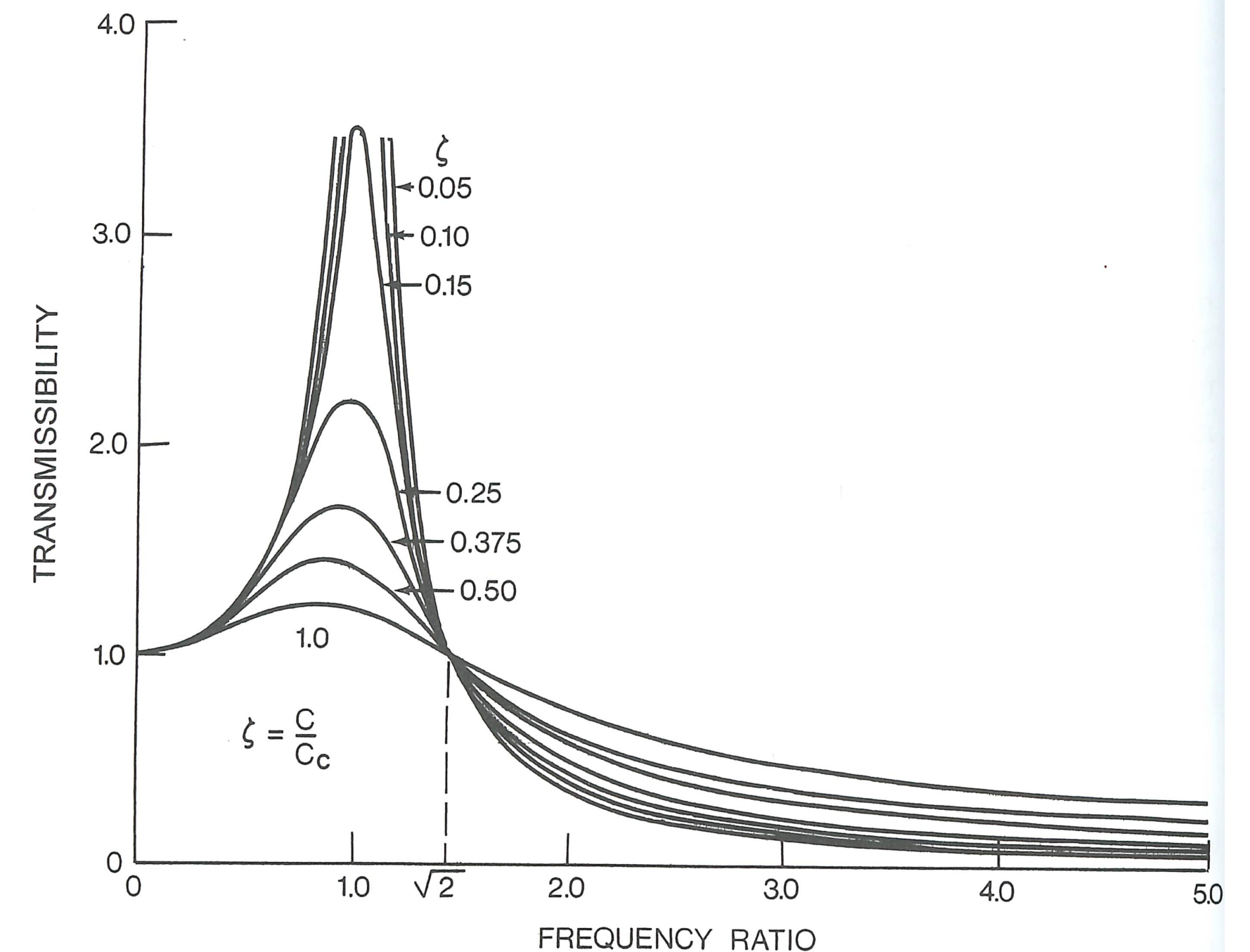
och

$$Z(s) = \frac{(2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} Z_0(s)$$

Förstärkningen ges av

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta f/f_n)^2}{(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\zeta f/f_n)^2}}$$

Figur 7.10 visar hur förstärkningen beror av dämpfaktorn och frekvenskvoten.



Komfort

Sambandet mellan vägprofilens spektraltäthet $S_g(f)$ och fjädrade massans spektraltäthet S_v ges av

$$S_v(f) = |H(f)|^2 S_g(f)$$

För att studera komfortkriterier kommer vi nu att studera den fjädrade massans acceleration och spektraltätheten för accelerationen ges av

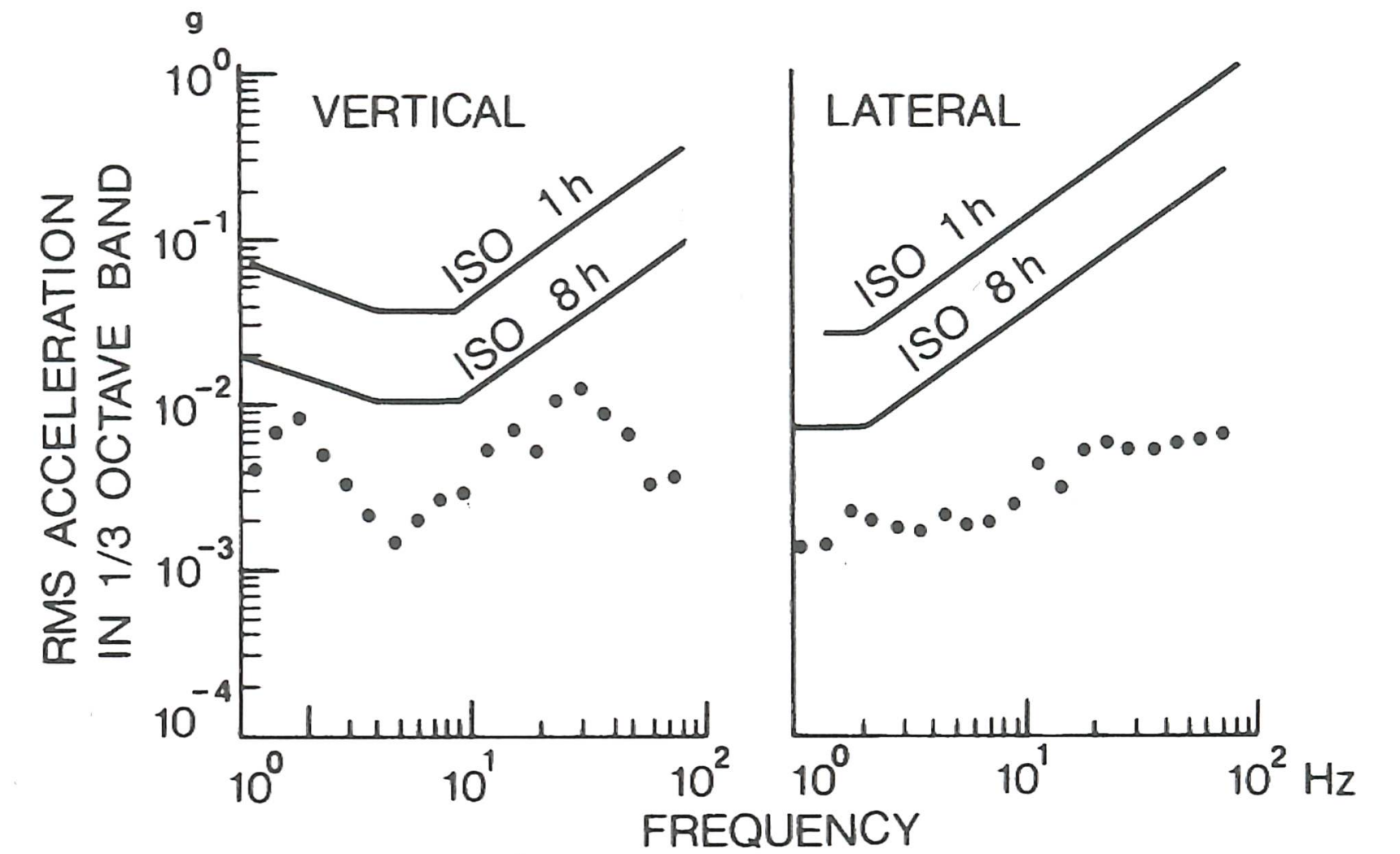
$$S_{va}(f) = |(2\pi f)^2 H(f)|^2 S_g(f)$$

Komfort

Kvadratiska medelvärdet av accelerationen i en tredjedels oktavband med mittfrekvensen f_c ges av:

$$\sqrt{\int_{0.89f_c}^{1.12f_c} S_{va}(f) df}$$

Figur 7.32 visar gränser för detta medelvärde enligt ISO 2631.



Active and Semi-Active Suspensions

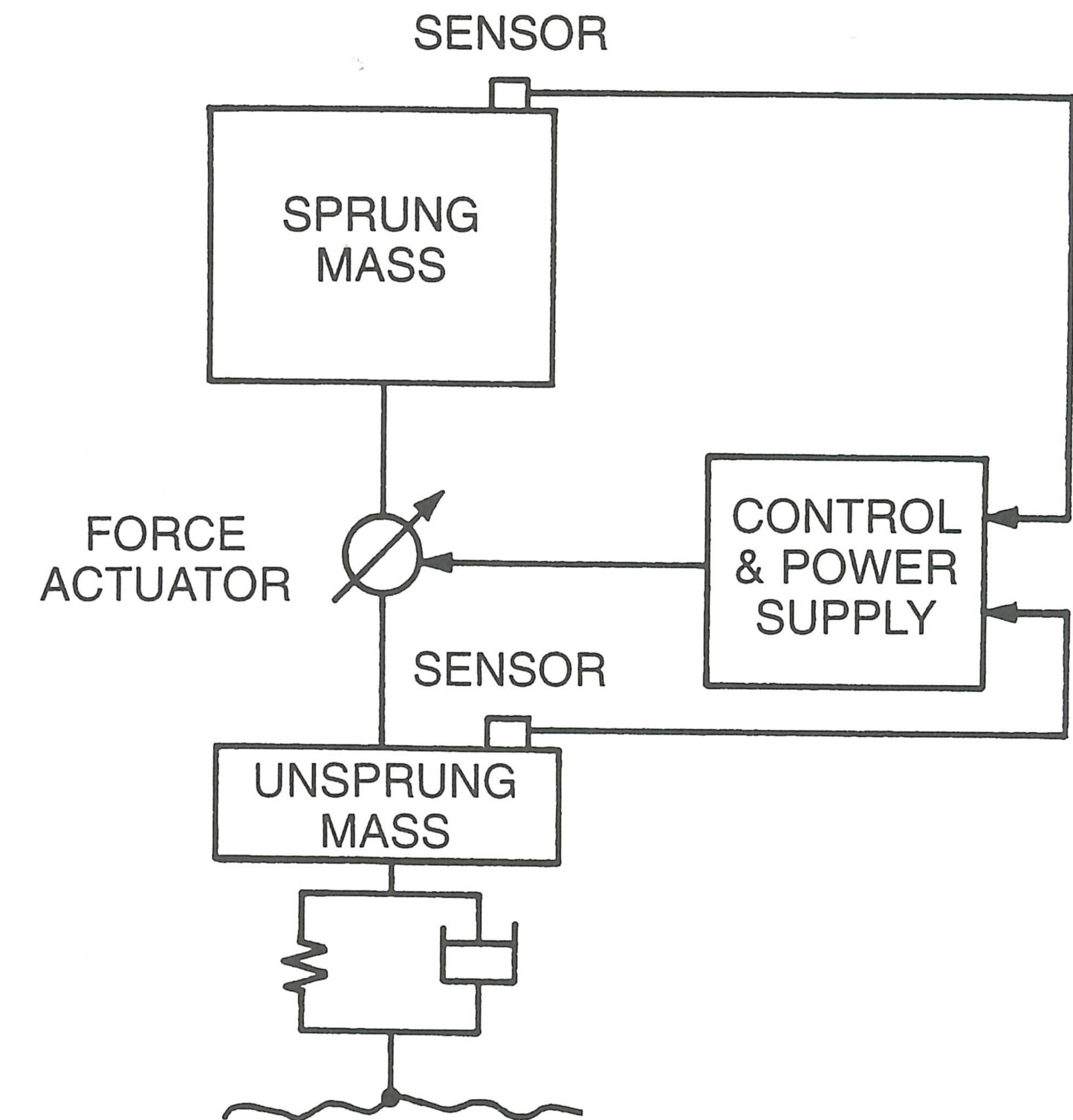
Aktiv fjädring

Figur 7.31 visar principen för en aktiv hjulupphängning.

Hydrauliska aktuatorer

Nackdelen är att systemet ofta väger mycket och förbrukar mycket energi.

Elektromagnetiska aktuatorer Linjära elektromagnetiska motorer är monterade vid samtliga hjul. Snabbare respons än hydrauliska. Motorerna kan användas som generatorer för att återvinna energi. Företaget Bose utvecklade en "proof of concept"-modell för ett sådant system. Bose startades av MIT-professorn Amar G. Bose.



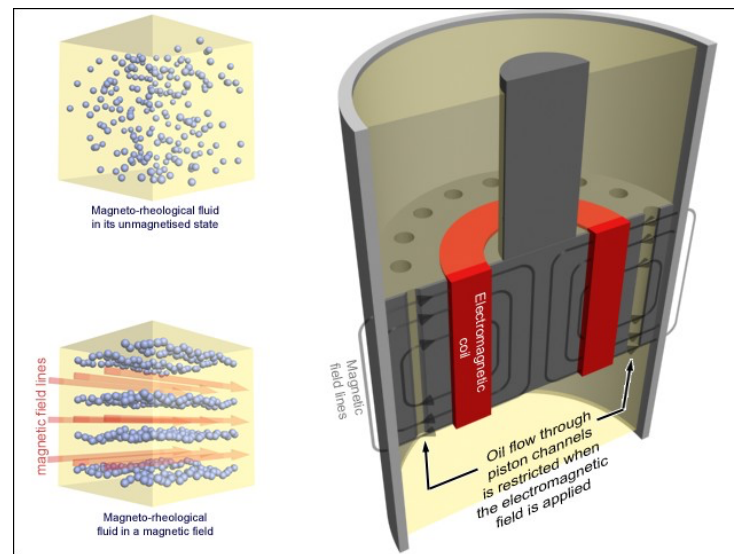
SUSPENSION SYSTEM



PREDICTS BUMPS ON ROAD

Reglering: Semi-aktivt system

Ett alternativ är att använda dämpare där dämpkoefficienten c_{sh} kan regleras.

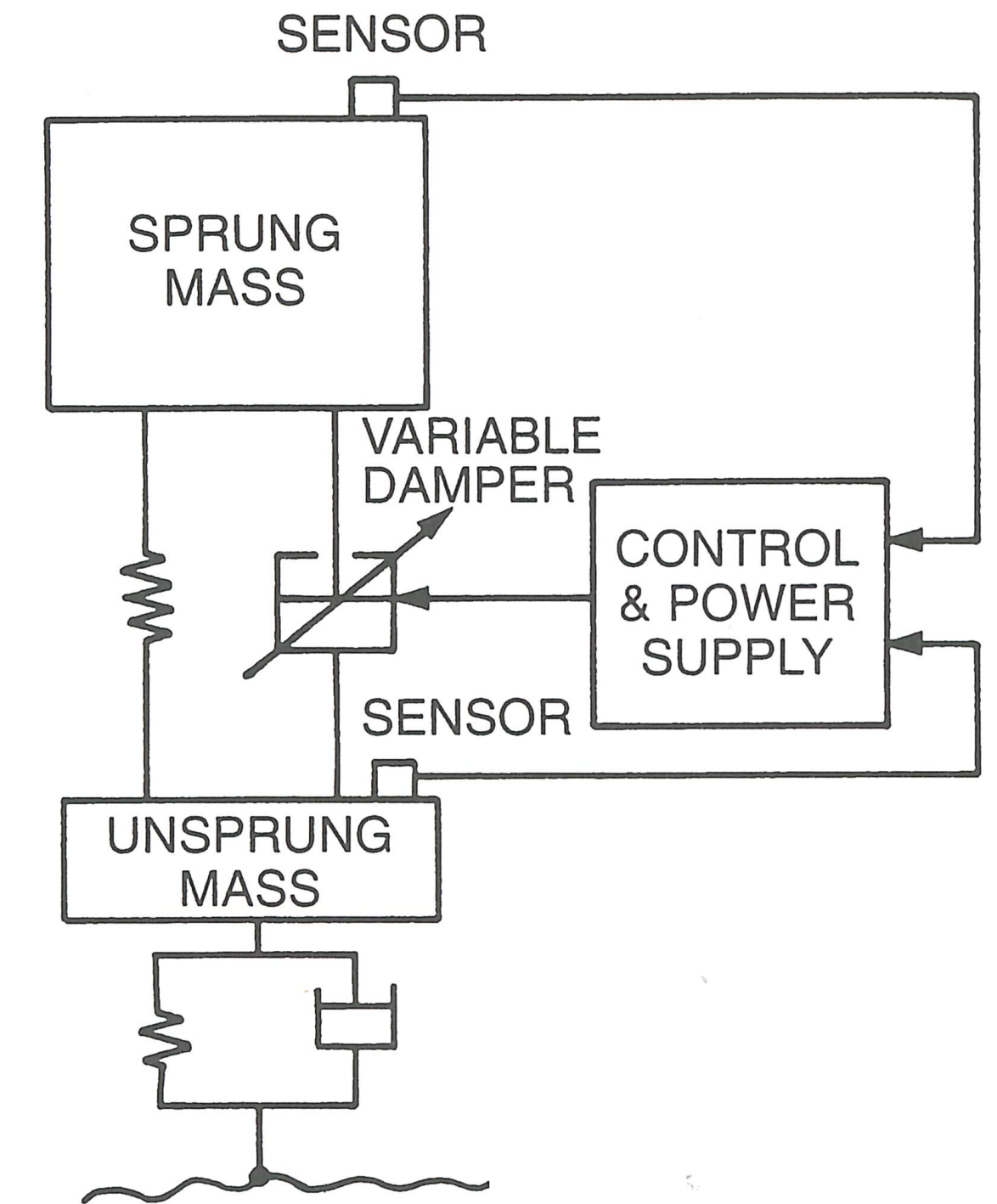


Magnetreologiska dämpare

Dämparen är fylld med en magnetreologisk vätska som strömmar genom kanaler i dämparen. Viskositeten ökar när man lägger på ett magnetfält, vilket gör dämparen styvare.

Hydrauliska solenoidventiler

Här regleras flödet av hydrauliska solenoidventiler. Ett exempel på detta är Öhlins CES-dämpare (Continuously controlled Electronic Suspension).

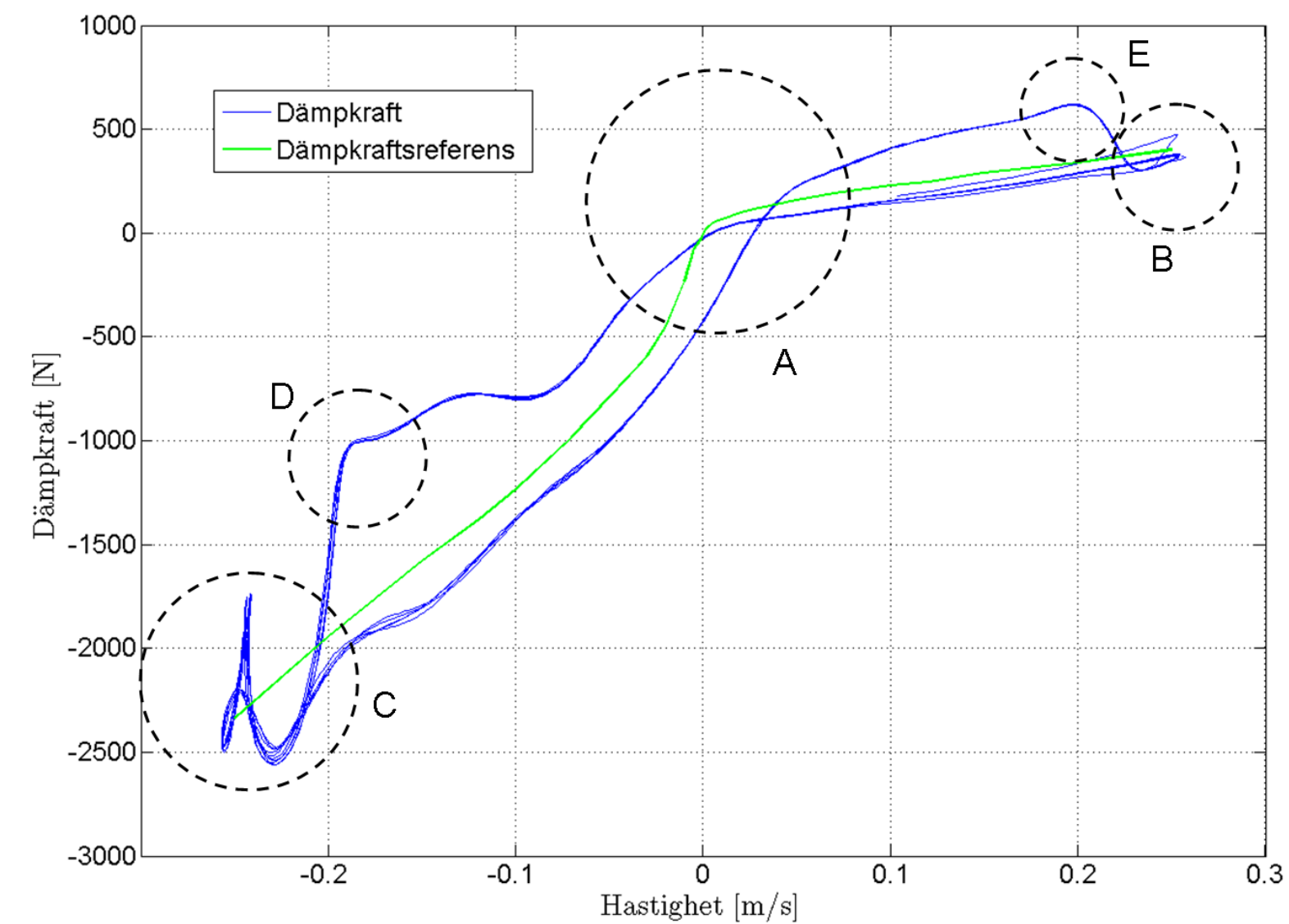


CES-dämparen

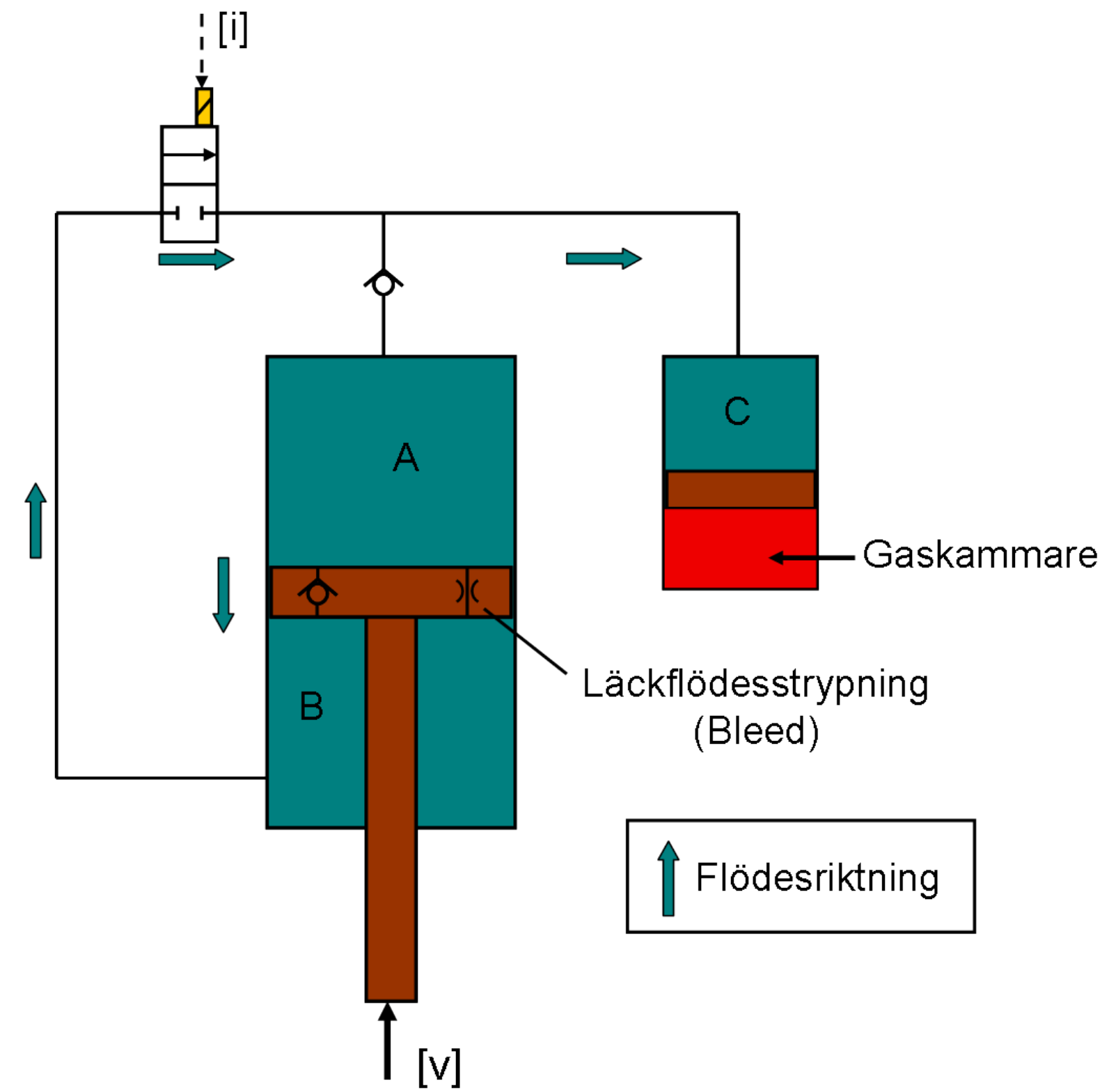
Från ett tidigare exjobb:

1.2 Problembeskrivning

Dämpkraften i CES-systemet är en kraftigt olinjär funktion av styrström och hastighet. Existerande reglering kan ibland vara för oexakt för att fungera tillfredsställande, se *figur 1.2* för exempel på detta.

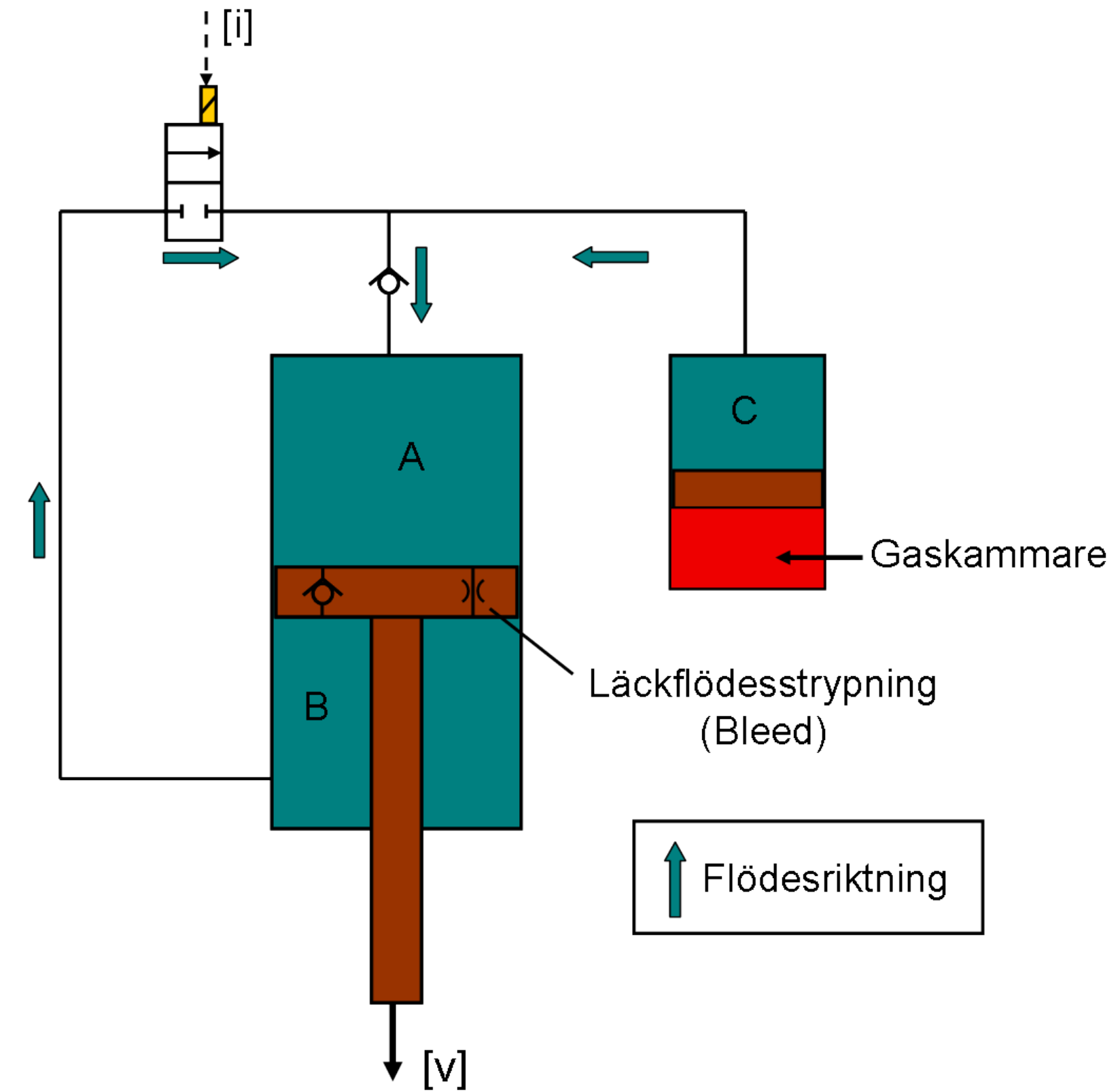


CES-dämparen



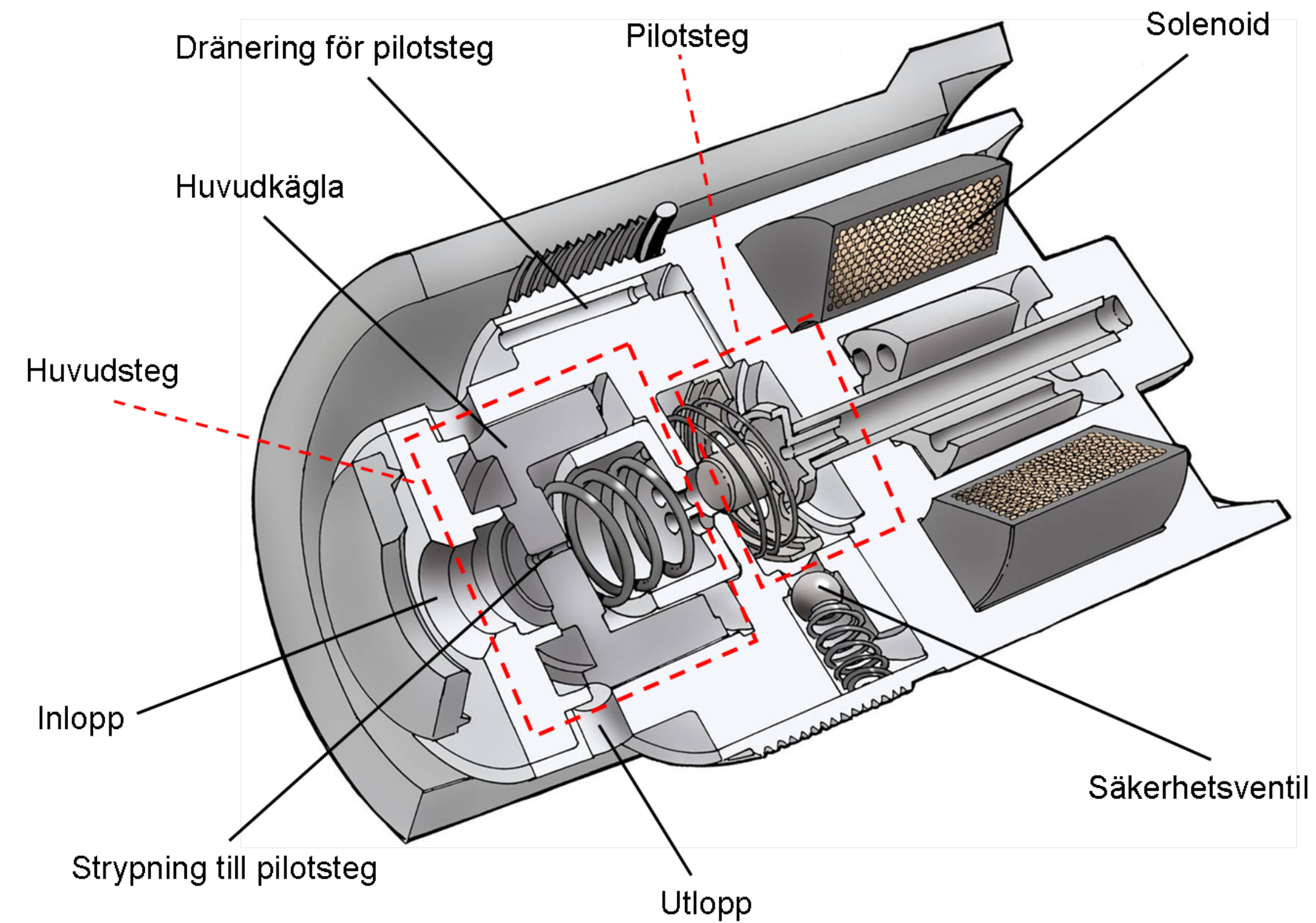
Figur 2.2. Skiss av oljeflödet vid kompressionsslag.

CES-dämparen



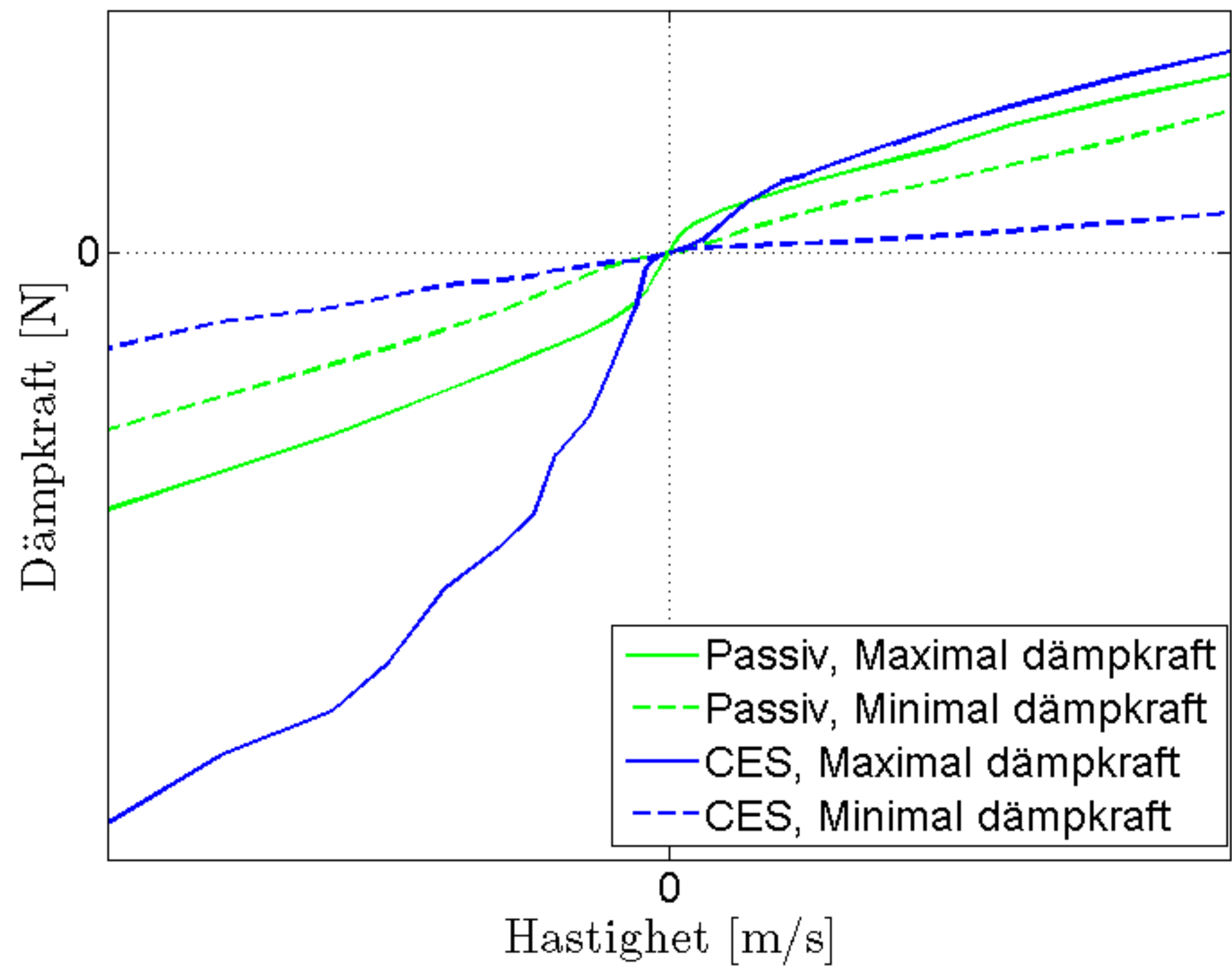
Figur 2.3. Skiss av oljeflödet vid returslag.

CES-dämparen



Figur 2.4. Schematisk bild över CES-ventilen.

CES-dämparen



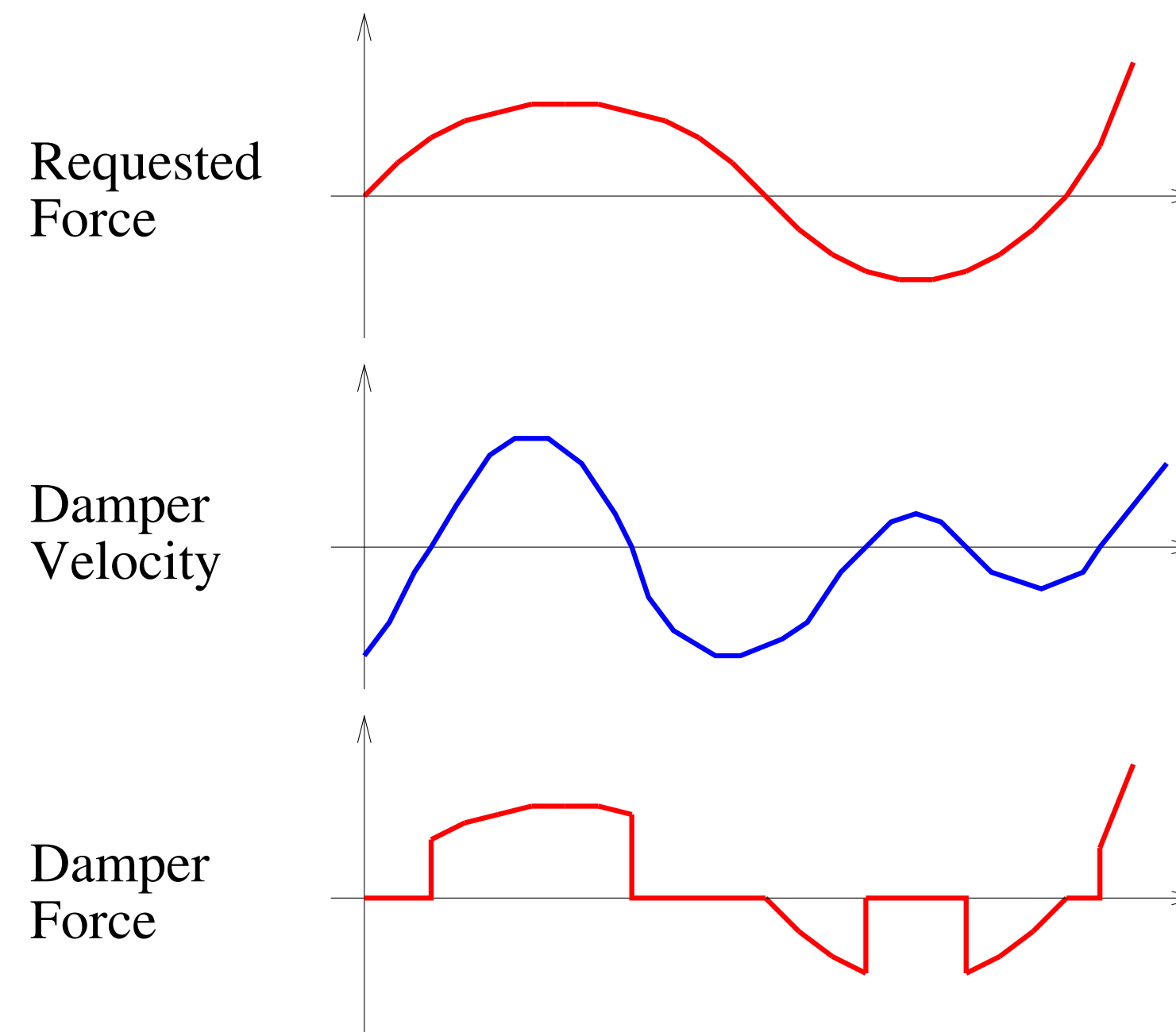
Semi-Active Suspension Control

Reglering: Semi-aktiva system

Arbetsgång kan vara följande

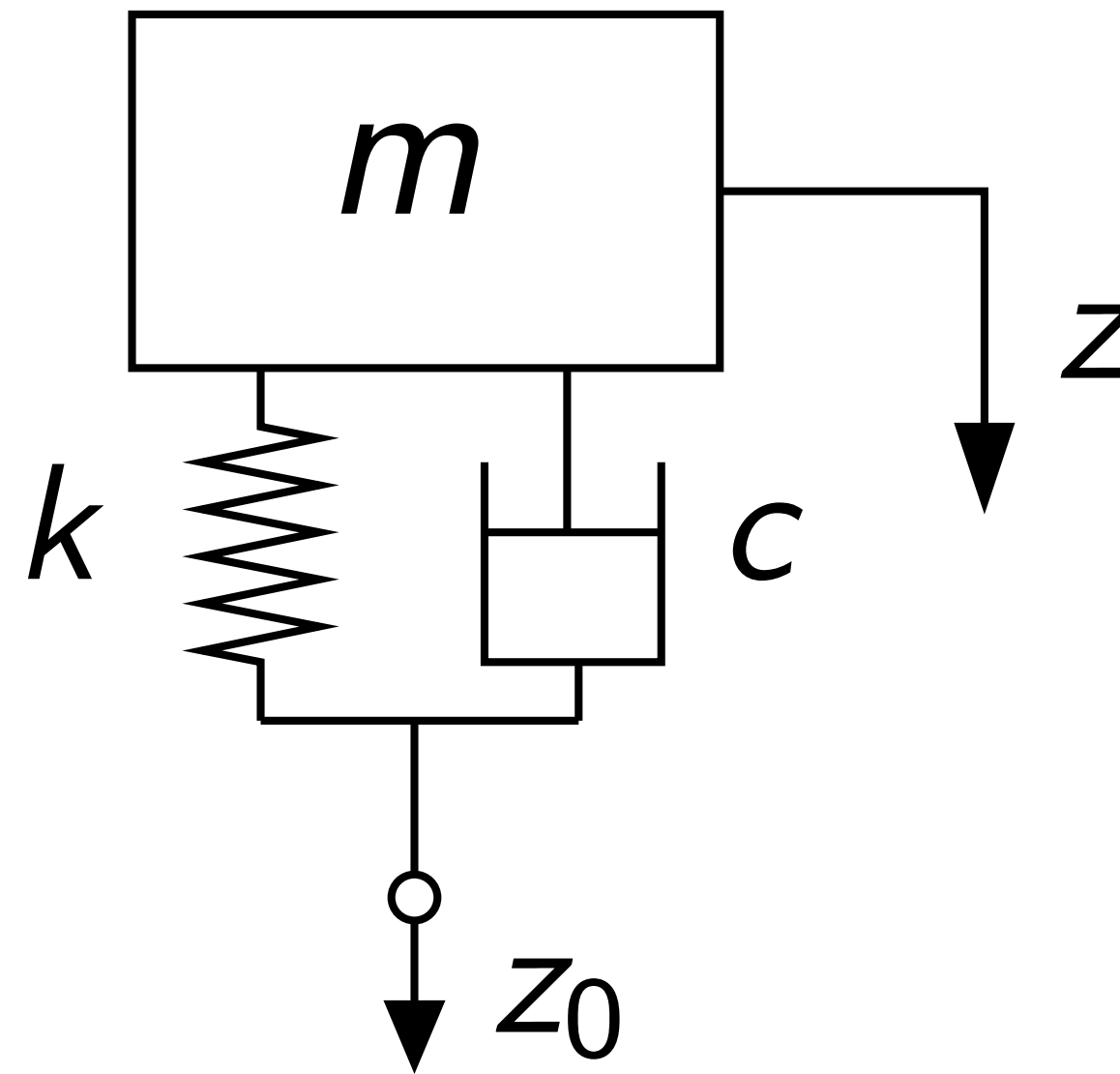
- Välj en reglerstrategi
- Beräkna önskad kraft från dämparen F_{sh}
- Välj c_{sh} så att dämparen ger kraften F_{sh} när så är möjligt.

Så här kan det se ut:



Reglering: Skyhook

Studerar kvartbilsmodellen med en frihetsgrad



Börjar med fallet med passiv fjädring som vi har studerat tidigare.

Reglering: Skyhook

Förstärkningen ges i det passiva fallet av

$$\frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta f/f_n)^2}{(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\zeta f/f_n)^2}}$$

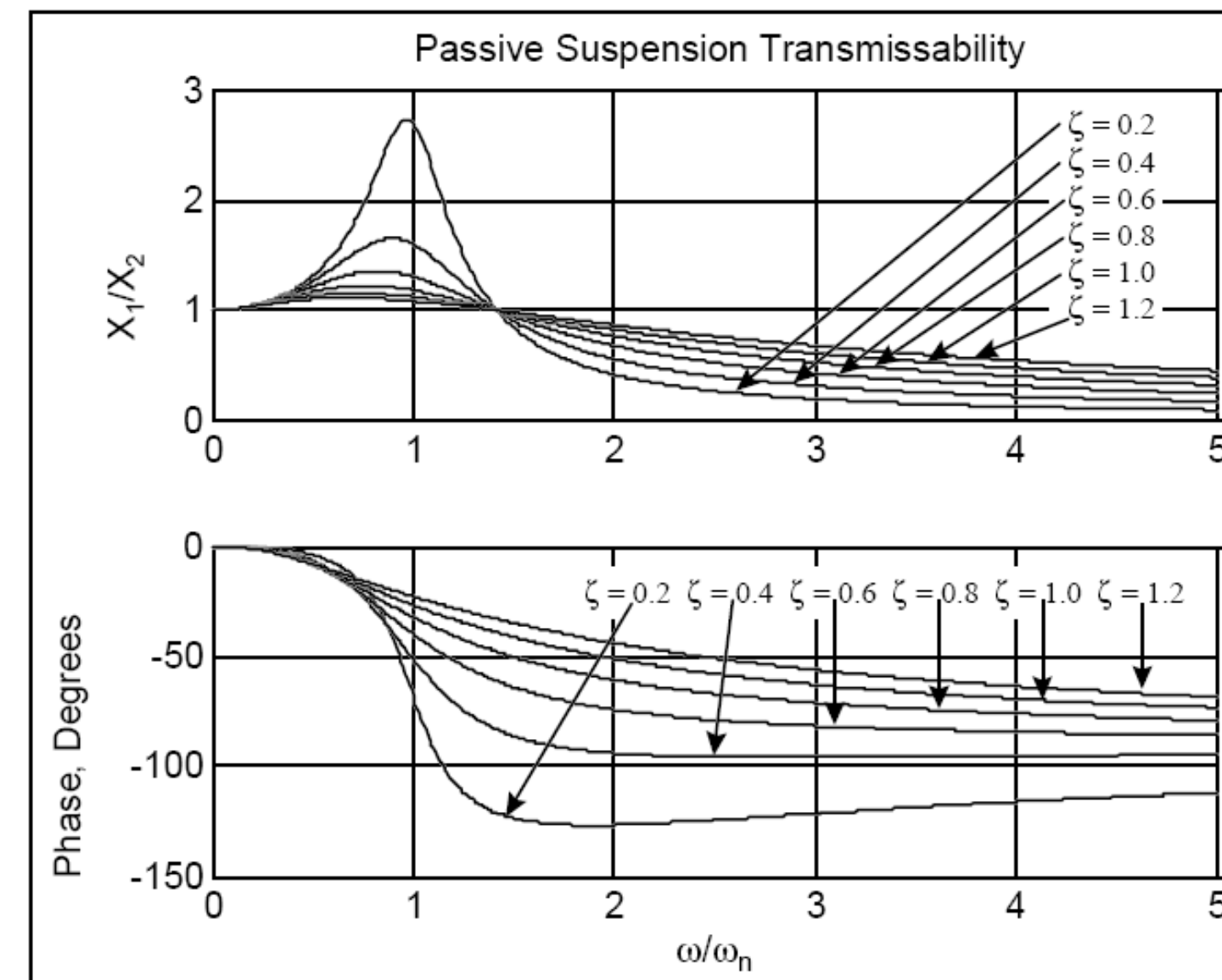
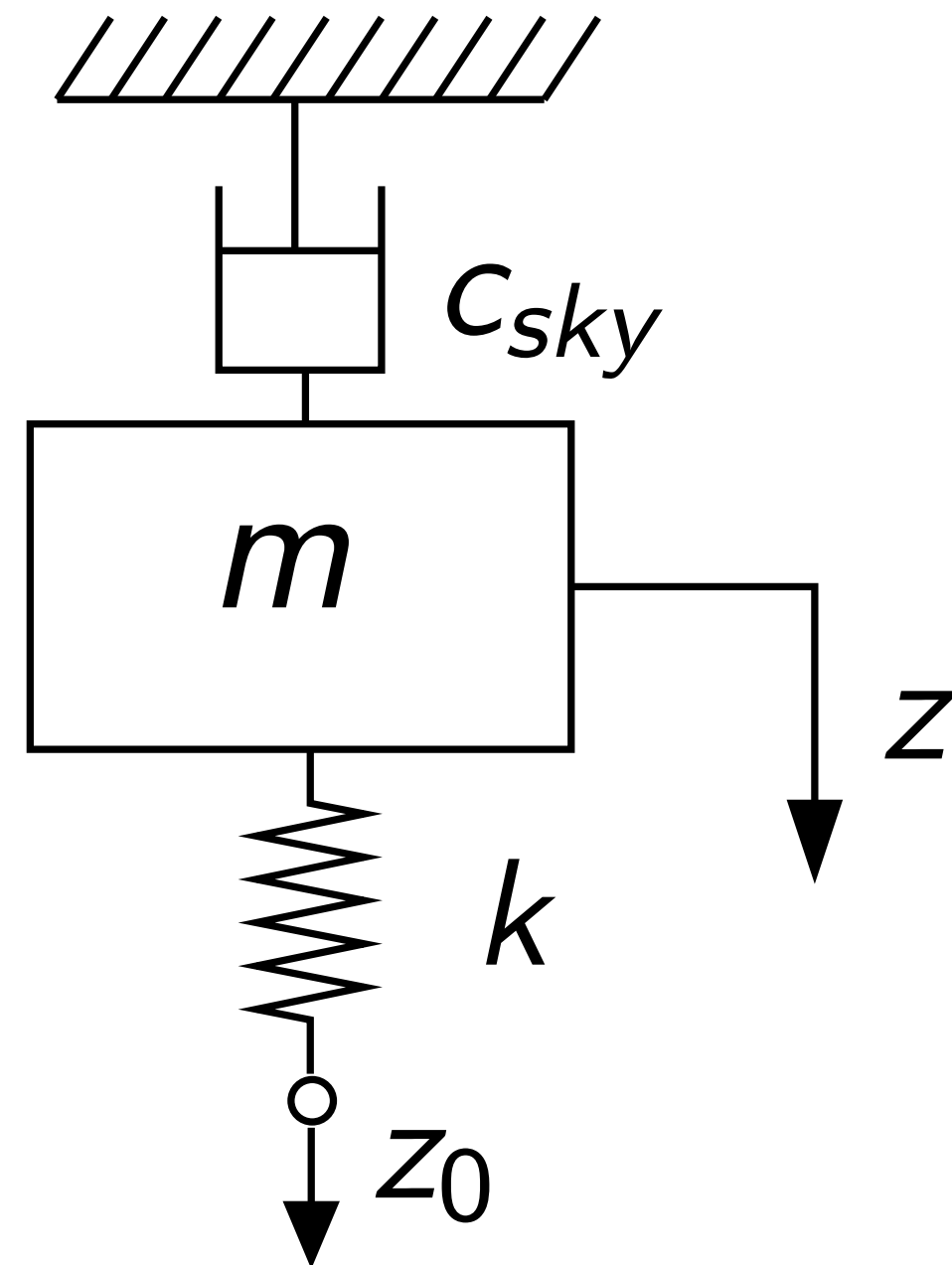


Figure 2.2. Passive Suspension Transmissibility.

Reglering: Skyhook

En konfiguration där man skulle slippa kompromissen mellan hög och låg dämpfaktor är följande:



Reglering: Skyhook

Förstärkningen för detta system ges av

$$\frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_0} = \sqrt{\frac{1}{(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\zeta f/f_n)^2}}$$

Jämför med föregående fall

$$\frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta f/f_n)^2}{(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\zeta f/f_n)^2}}$$

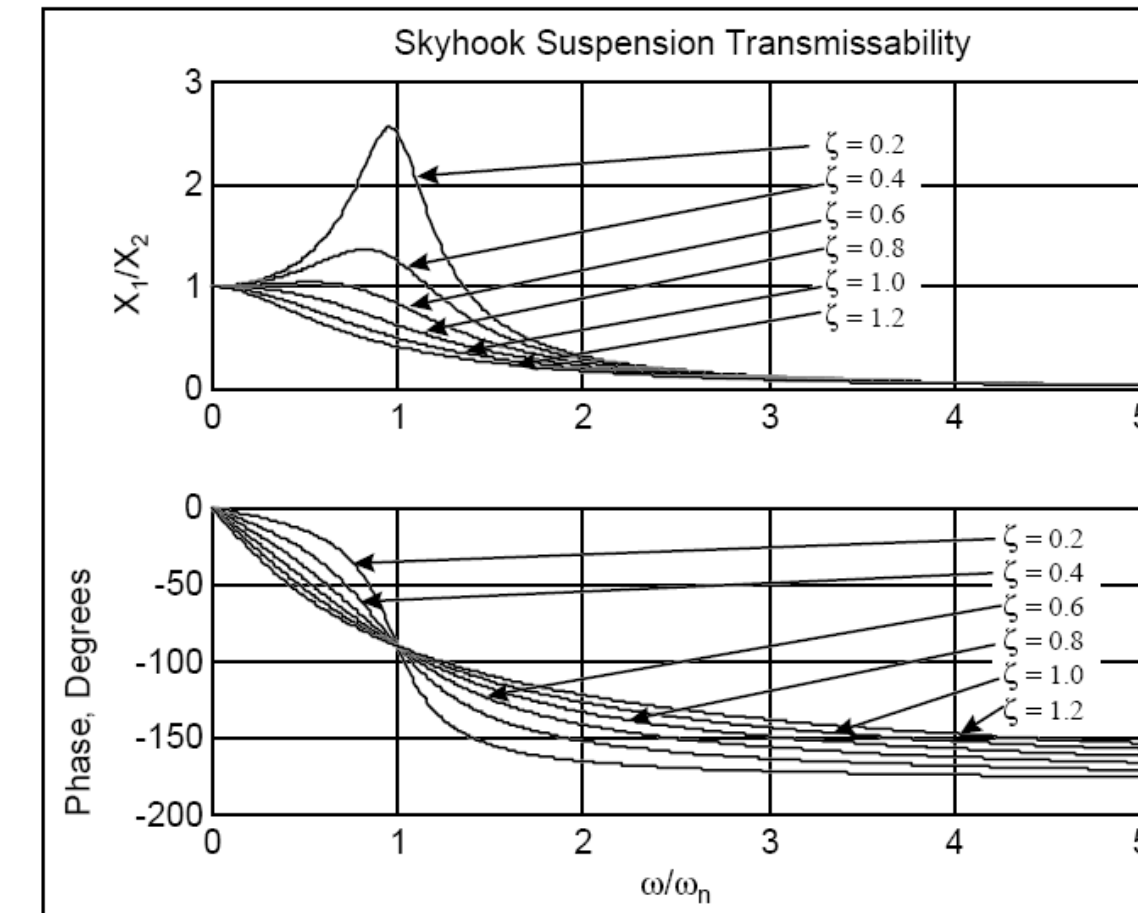


Figure 2.4. Ideal Skyhook Transmissibility.

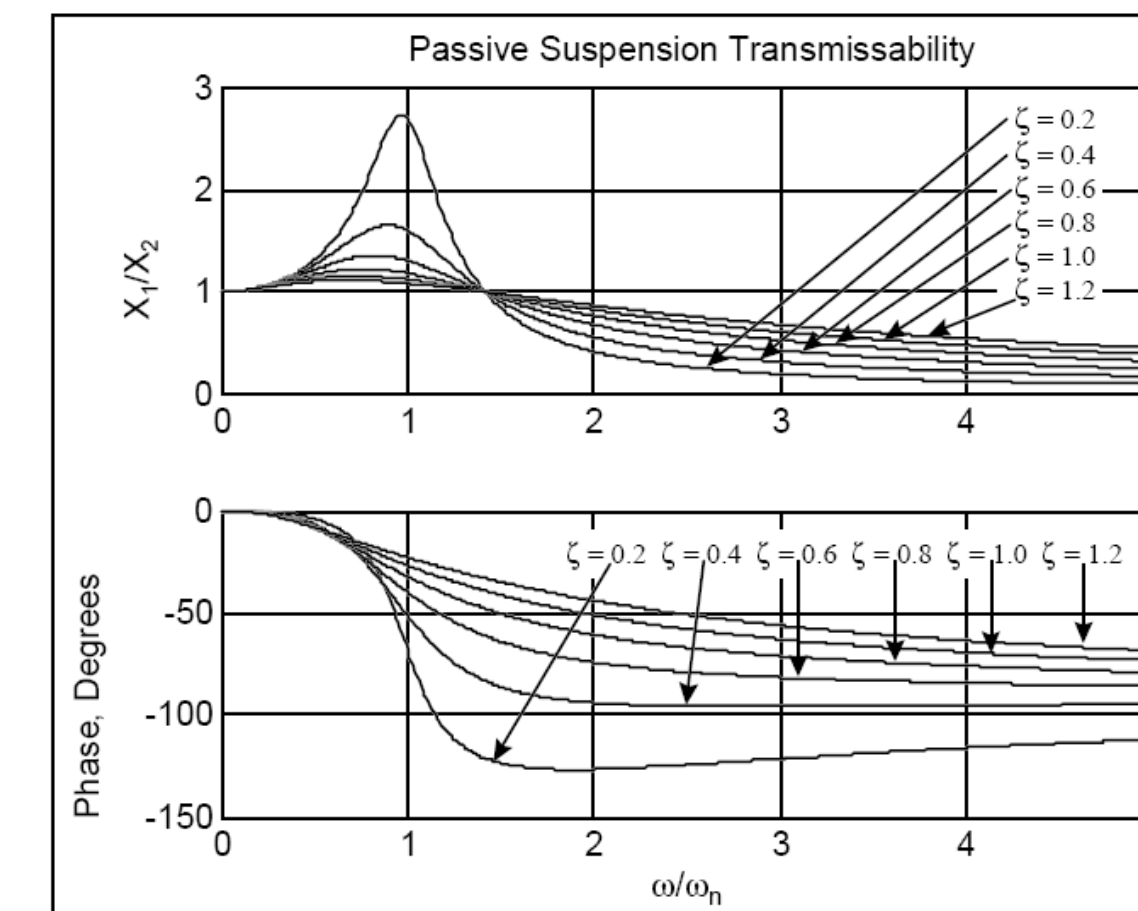


Figure 2.2. Passive Suspension Transmissibility.

Reglering: Skyhook

Kraften på den fjädrade massan i låtsas-systemet ges av:

$$c_{sky}\dot{z} + k(z - z_0)$$

Kraften på den fjädrade massan i det riktiga systemet är

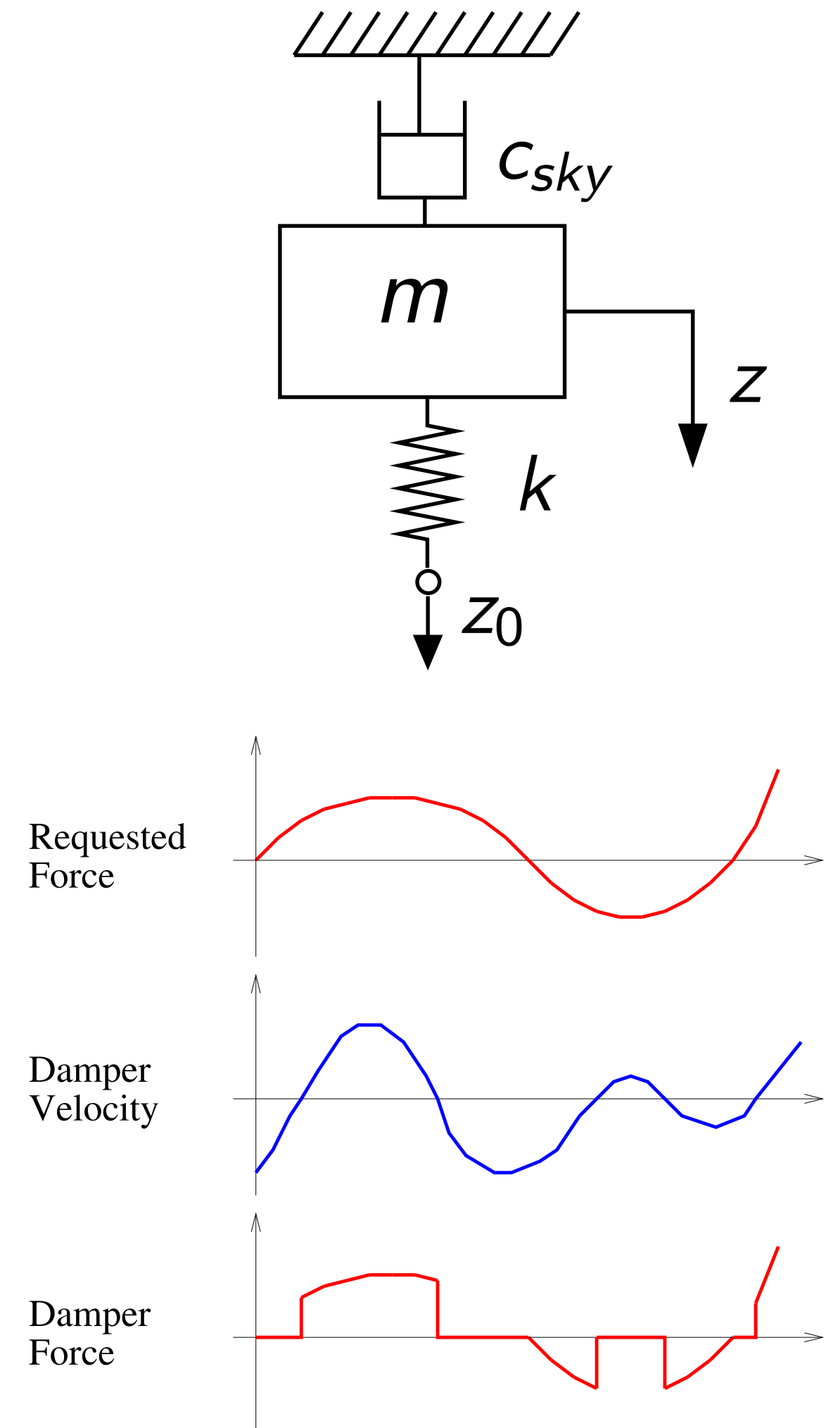
$$c(\dot{z} - \dot{z}_0) + k(z - z_0)$$

En jämförelse ger följande samband:

$$c = c_{sky} \frac{\dot{z}}{\dot{z} - \dot{z}_0}$$

Eftersom c alltid är positiv väljer vi

$$c = \max \left\{ c_{sky} \frac{\dot{z}}{\dot{z} - \dot{z}_0}, 0 \right\}$$



Reglering: Skyhook

En förenklad variant som presenteras i boken är

$$c = \begin{cases} c_{firm} & \text{om } \dot{z}_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \geq 0 \\ c_{soft} & \text{om } \dot{z}_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) < 0 \end{cases}$$

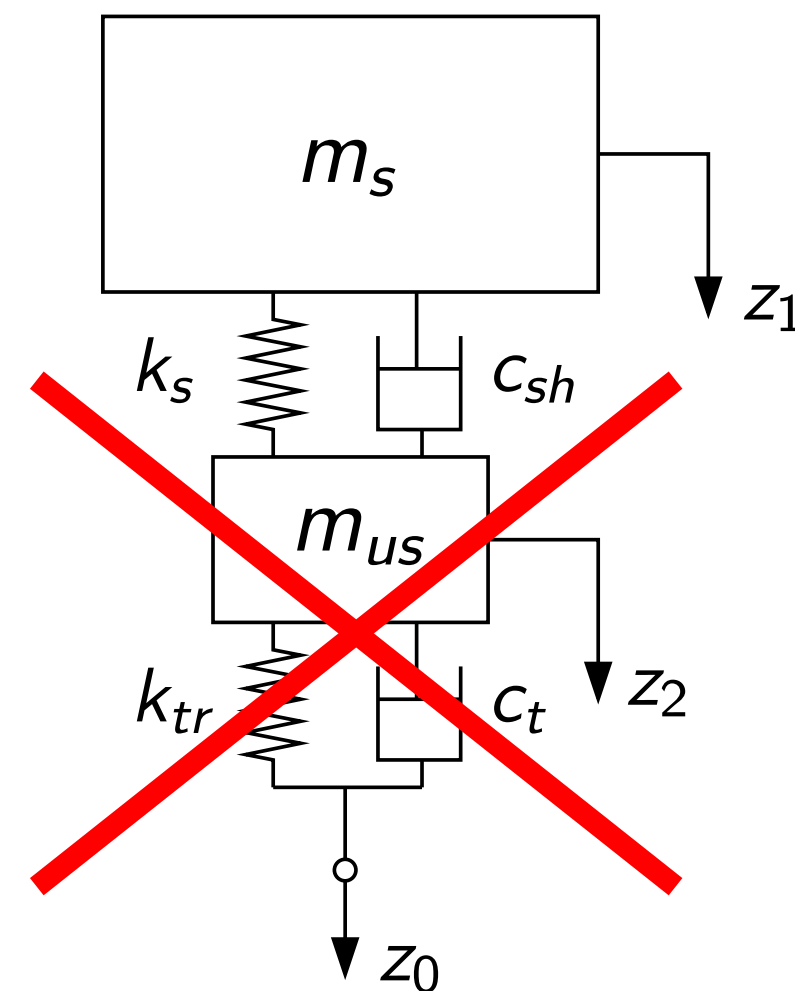
Jämför med föregående

$$c = \max \left\{ c_{sky} \frac{\dot{z}}{\dot{z} - \dot{z}_0}, 0 \right\}$$

Reglering: Alternativ strategi

Betraktar även här kvartsbilsmodellen.

Antag vi vill få den fjädrade massan m_s att bete sig som att resten av systemet inte fanns,



d.v.s. att kraften på massan är lika med noll.

Reglering: Alternativ strategi

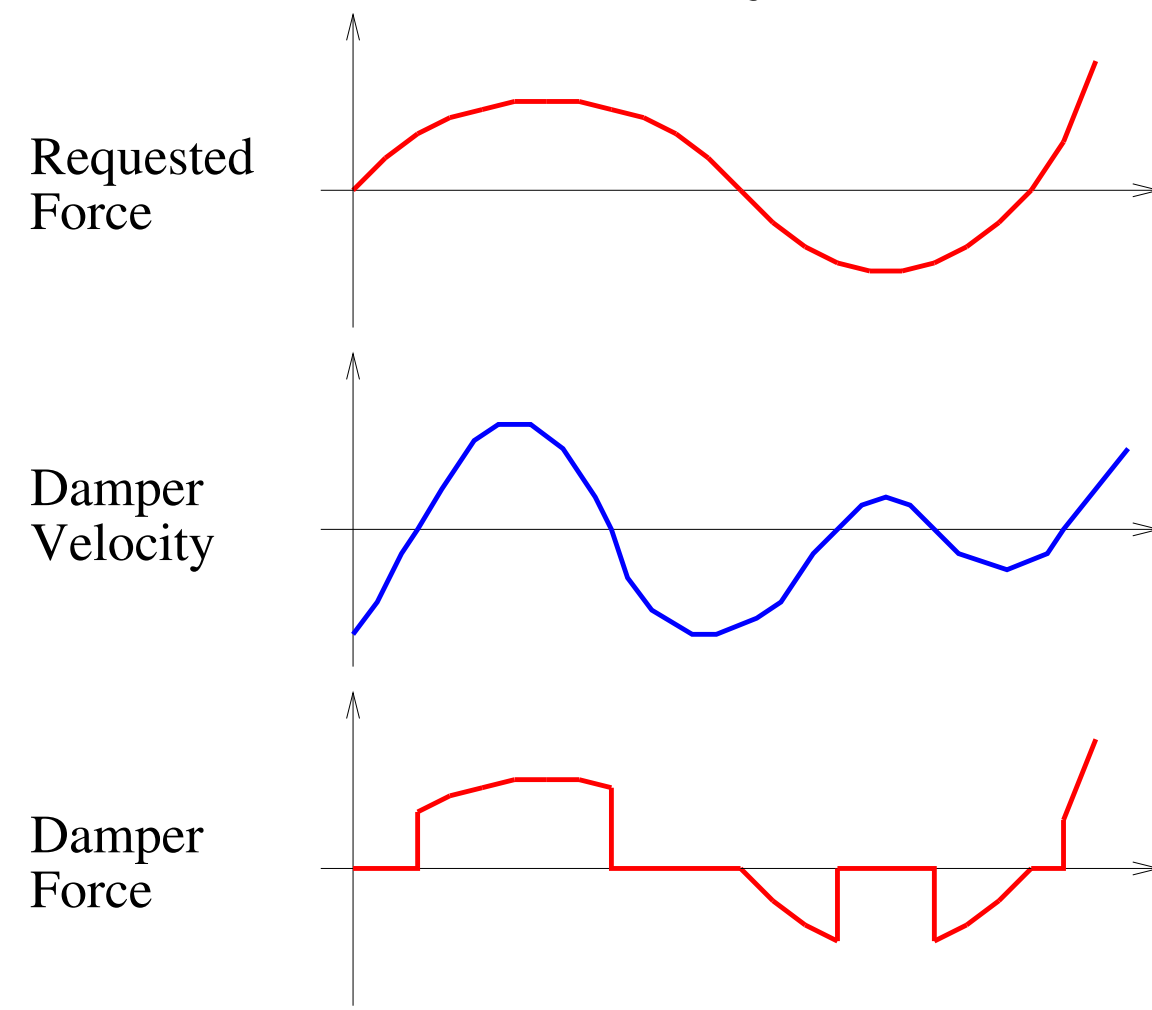
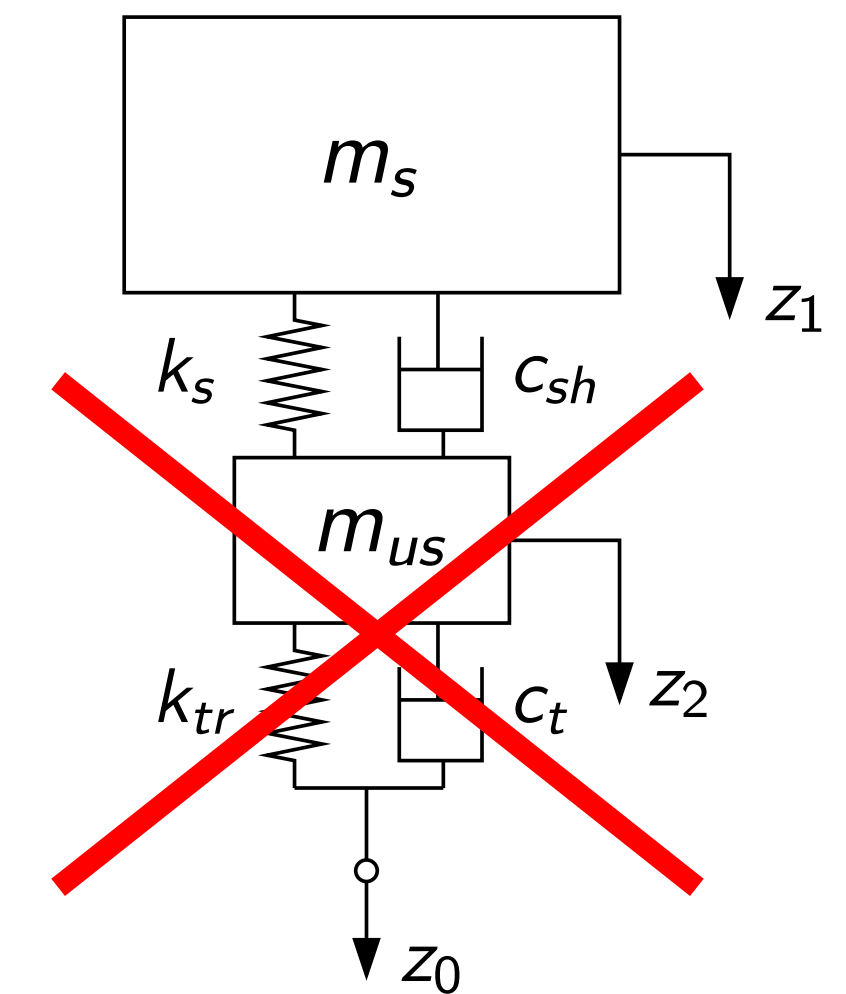
Totala kraften som verkar på den fjädrade massan är

$$c_{sh}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_s(z_1 - z_2)$$

Genom att sätta uttrycket till noll, lösa ut c_{sh} och ta hänsyn till att c_{sh} inte kan vara negativ, så får vi följande reglerstrategi:

$$c_{sh} = \begin{cases} c_{soft} & \text{om } (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)(z_1 - z_2) \geq 0, \\ -k_s(z_1 - z_2)/(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) & \text{om } (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)(z_1 - z_2) < 0, \end{cases}$$

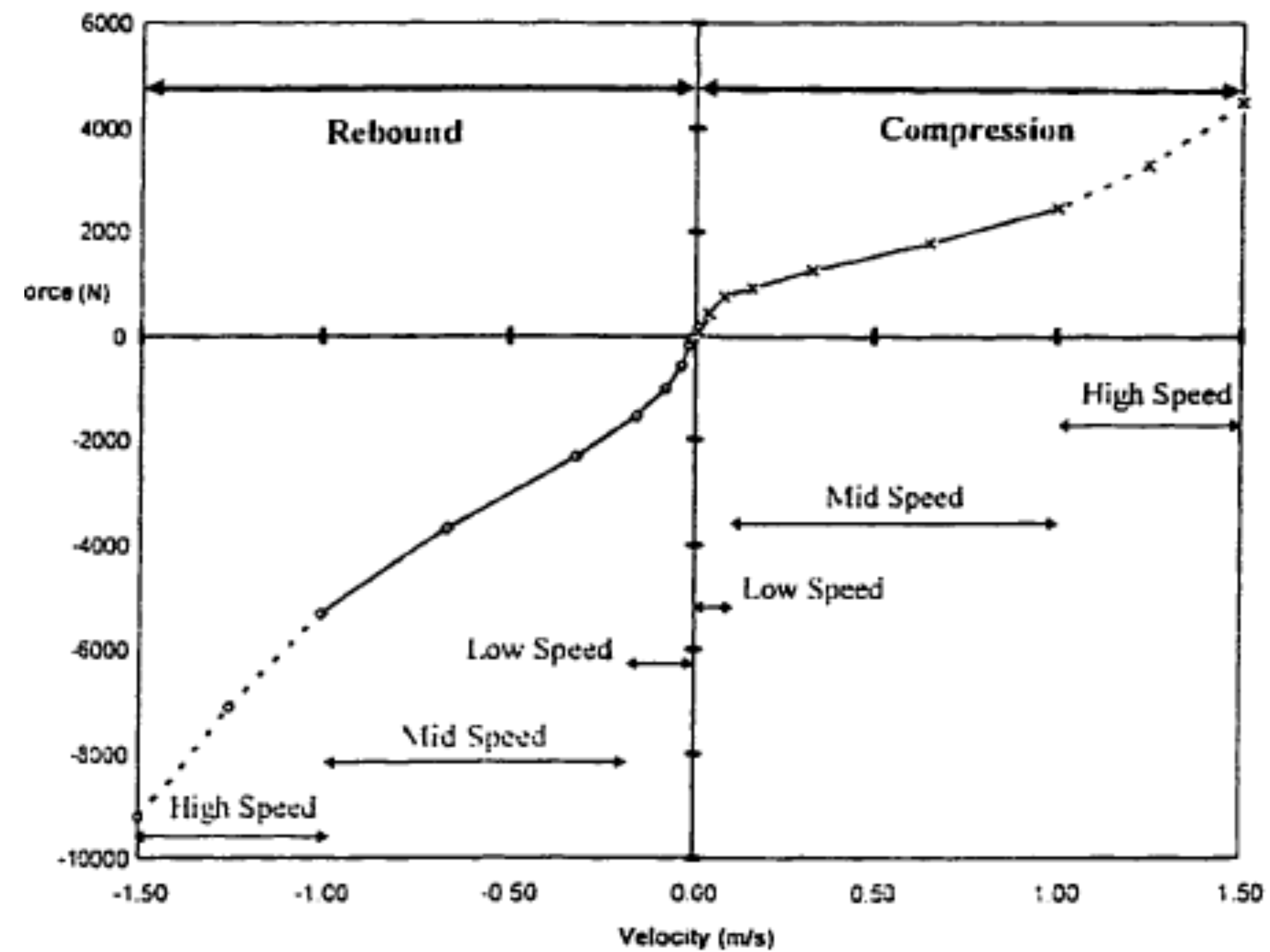
Observera att med denna metod behöver vi bara känna till $z_1 - z_2$, d.v.s. den relativa skillnaden mellan den fjädrade och ofjädrade massan.



Non-linear Dampers

Olinjära dämpare

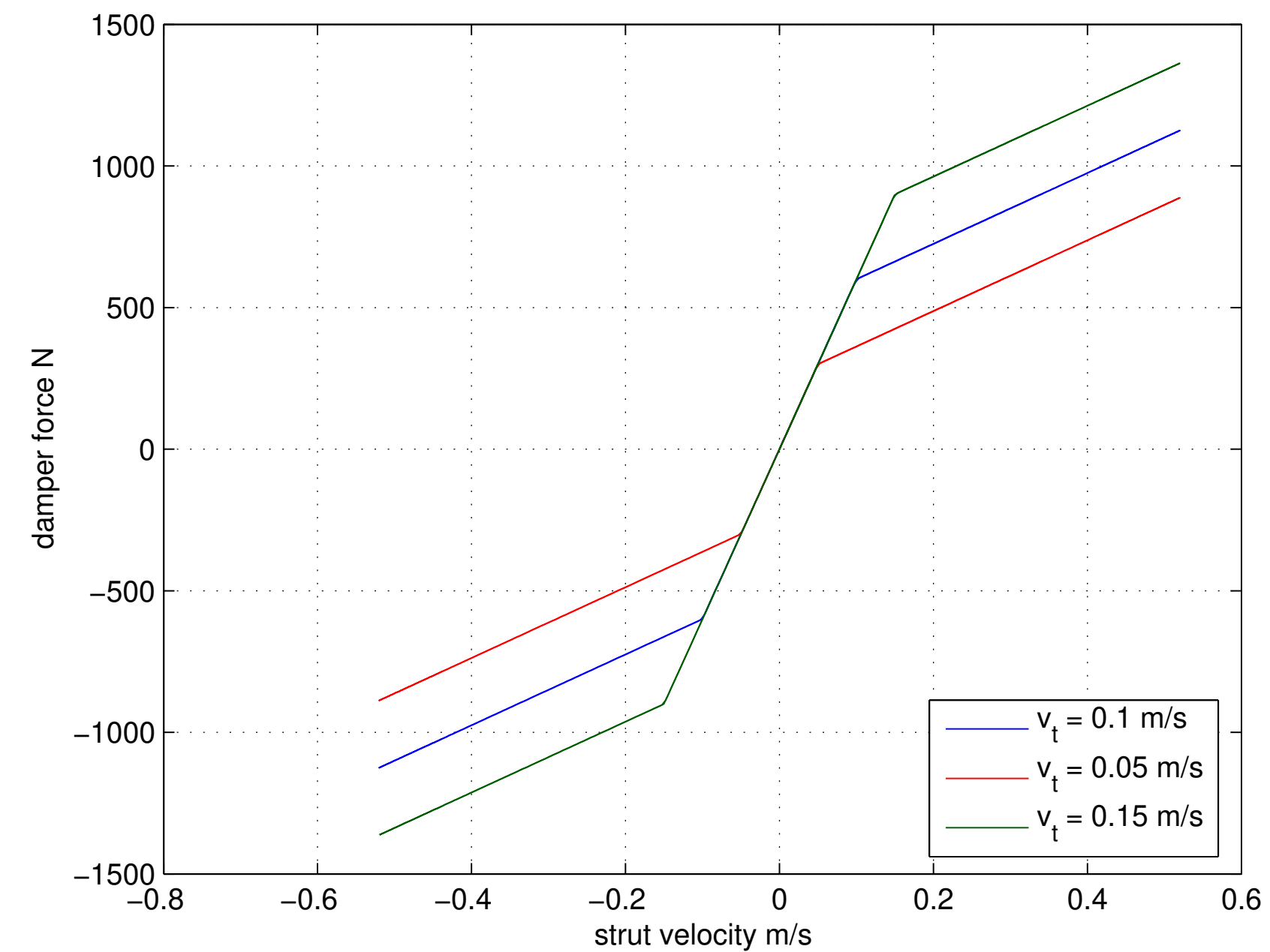
Exempel på beteende för en olinjär dämpare



Olinjära dämpare

Hittills har vi studerat linjära modeller för dämpare.

Följande figur visar sambandet mellan kraft och $\dot{z}_1 - \dot{z}_2$ för en simulering av en olinjär dämpare, där hastigheten v_t är en designparameter.



Olinjära dämpare

När parametern ν_t skall väljas kan det finnas motstridiga önskemål.

Exempel på detta är komfortmättet

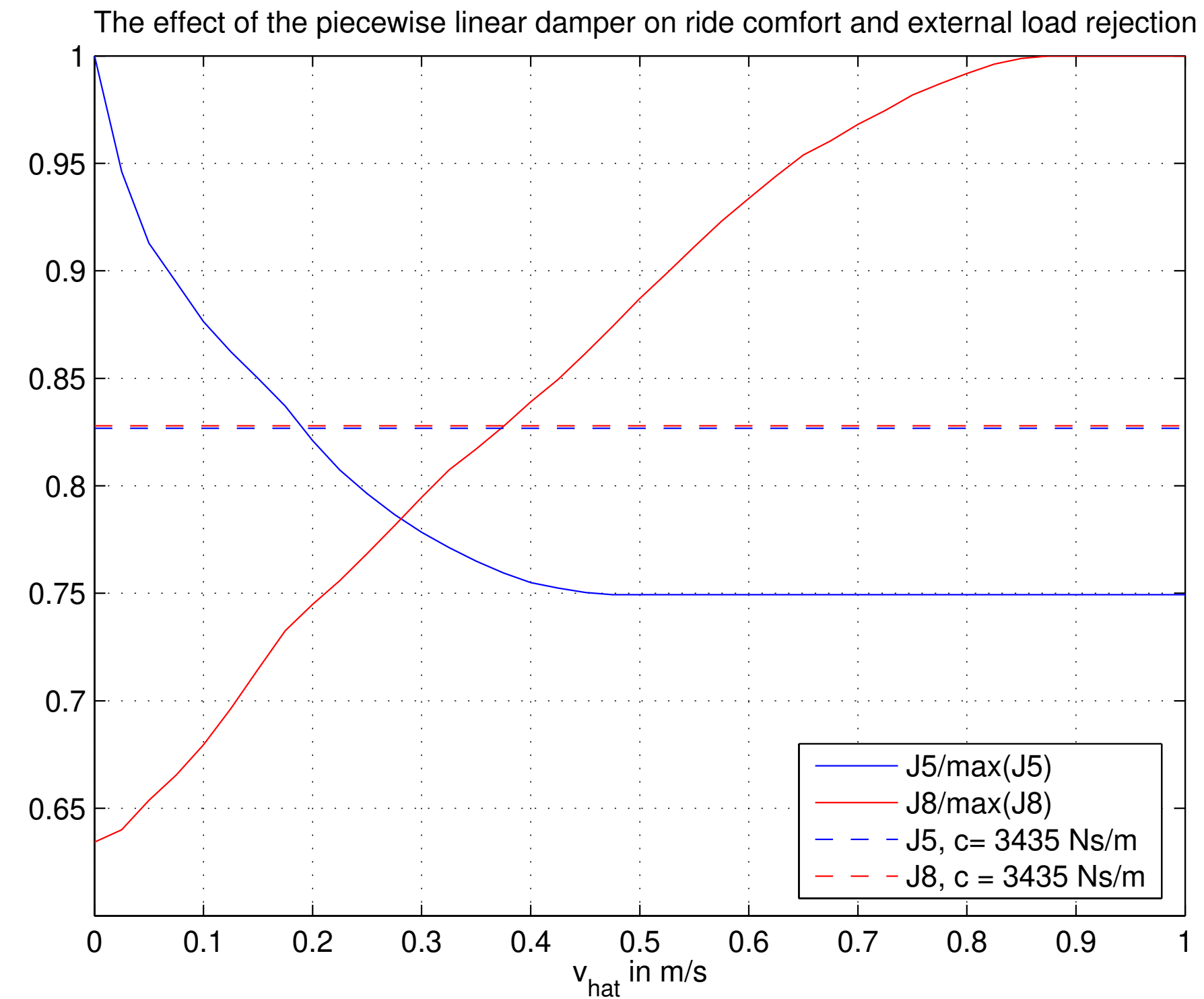
$$J_8 = \int_0^T \ddot{z}_1^2 dt$$

och följande mått på den fjädrade massans avvikelse från jämviktsläget:

$$J_5 = \int_0^T z_1^2 dt$$

Olinjära dämpare

Följande figur visar hur J_5 och J_8 beror av v_t



Referens: *Simulation-based analysis and optimal design of nonlinear passive vehicle suspensions*,
Christos Papageorgiou och Malcolm C. Smith