

Vehicle Dynamics and Control

Lecture 7

The lectures

- Tyre modelling
- Longitudinal dynamics and control
- Lateral dynamics and control
- Vertical dynamics and control
- Stability and control
- Applications

Today's lecture

- Electronic stability control
- Four-wheel steering and step responses

Electronic Stability Control

Vehicle Stability Control ESP

Kärt barn har många namn

- AYC - Active Yaw Control
- VDC - Vehicle Dynamics Control
- ESP - Electronic Stability Program

I fortsättningen används ESP som gemensam förkortning eftersom den är vanligast åtminstone för tillfället.

Från Wikipedia:

Det engelska namnet *Electronic Stability Program* är också ett [varumärke](#) ägt av [Robert Bosch GmbH](#).

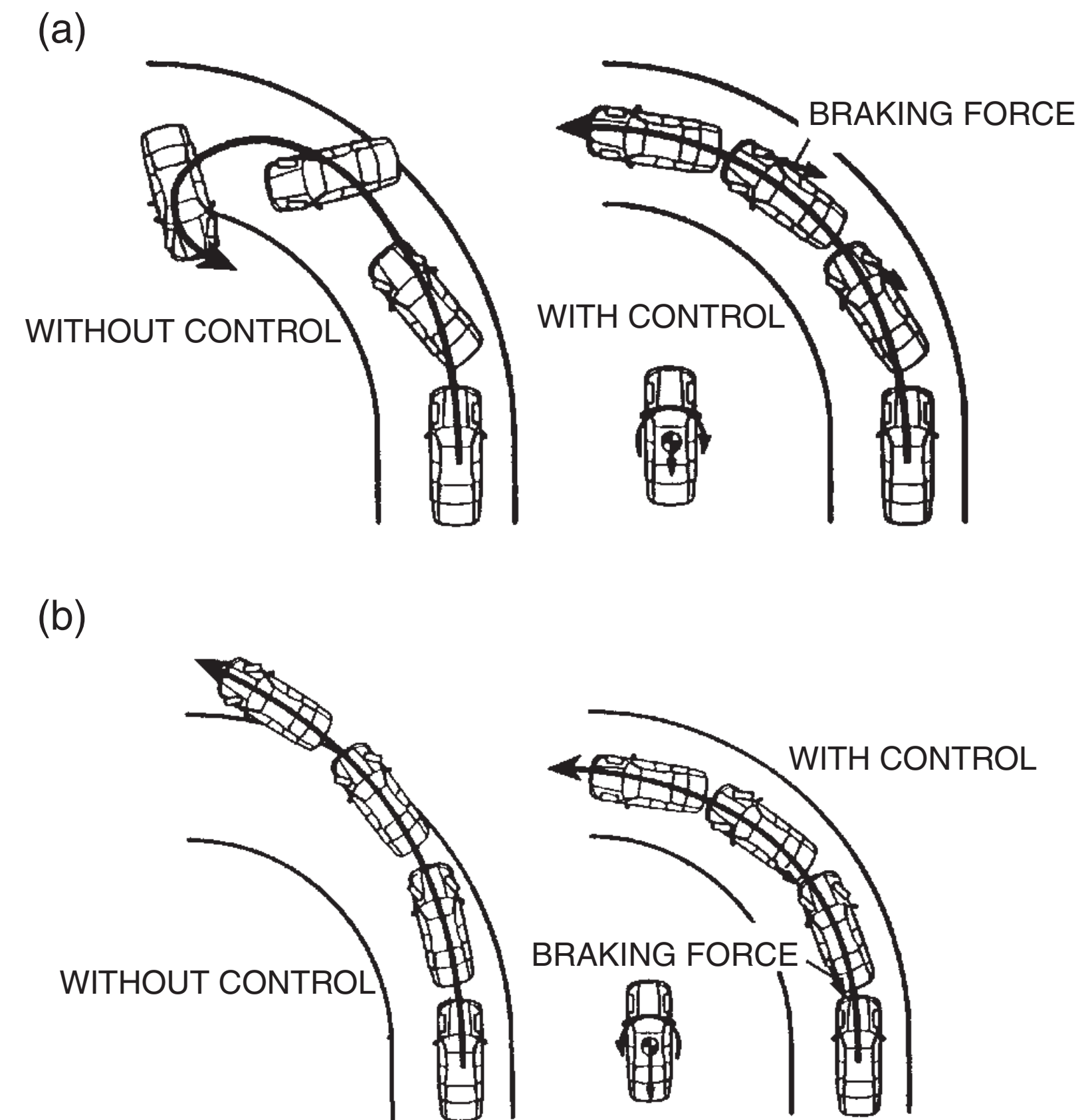
Andra förkortningar och beteckningar är CST ([Ferrari](#)), DSC ([BMW](#) och [Mazda](#)), MASC [Mitsubishi](#), MSP ([Maserati](#)), PSM ([Porsche](#)), VDC ([Alfa Romeo](#)), VSA ([Honda](#)), VSC ([Toyota](#) och [Lexus](#)), samt hos [Volvos](#) system TRACS, ETC - Electronic Traction control, DSA - Dynamic Stability Assistant, STC - Stability Traction Control och DSTC - Dynamic Stability and Traction Control.

Övergripande funktion

För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande reglersystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående

Figur 5.24 från boken

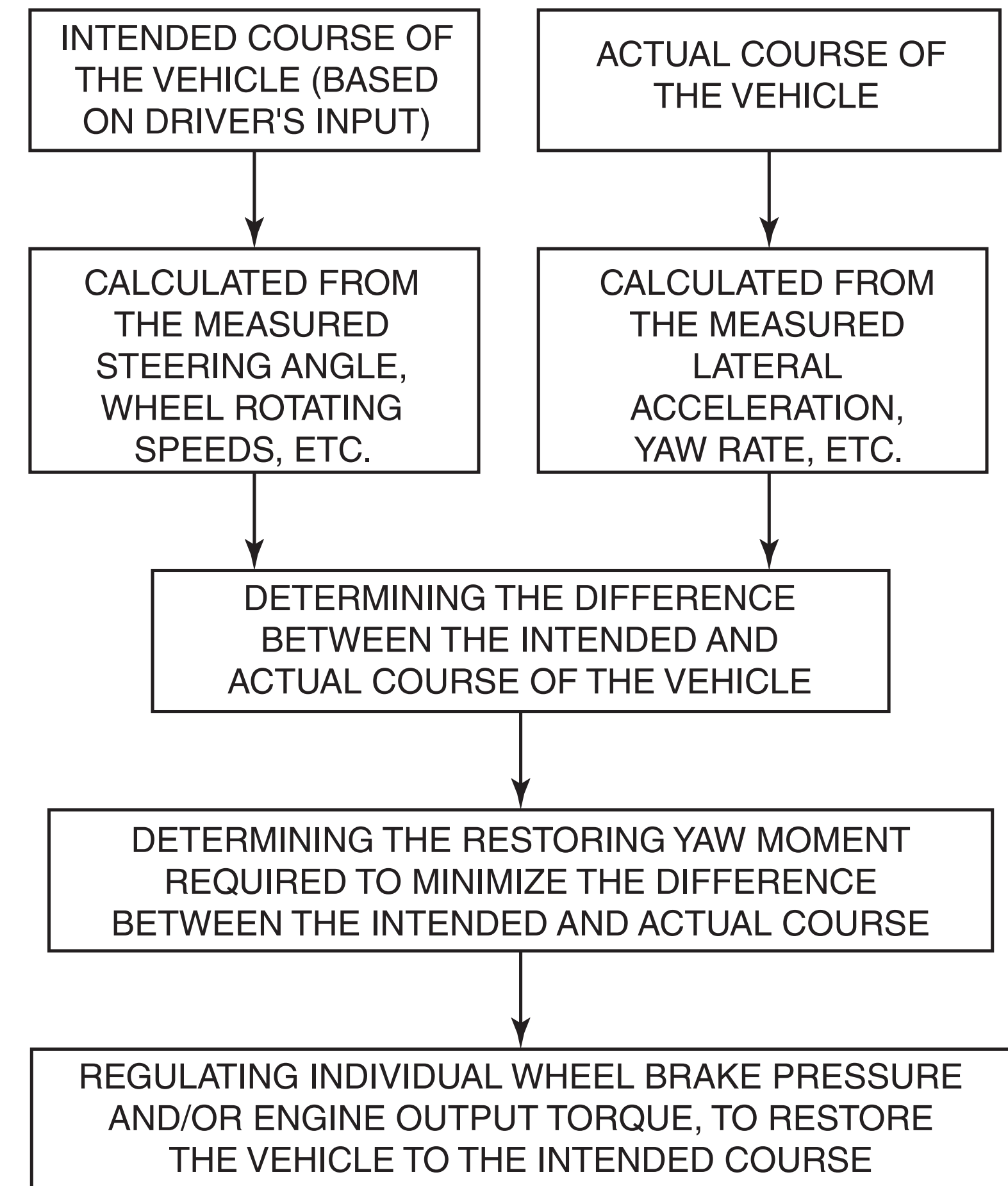


Mål

Skapa ett sladdhämmande moment ΔM baserat på bilens uppförande jämfört med önskat beteende.

Vi börjar med att titta på kraven på kunskap om bilens aktuella uppförande.

Hur många variabler behövs?



Krav på kunskap om bilens uppförande

Hur beter sig en bil i stabil kurvtagning (relaterat till dynamiska variabler)?

En bil med konstant fart i en kurva med konstant krökning har konstant Ω_z , dvs konstant girvinkelhastighet (yaw-rate på engelska och ofta betecknad $\dot{\Psi}$).

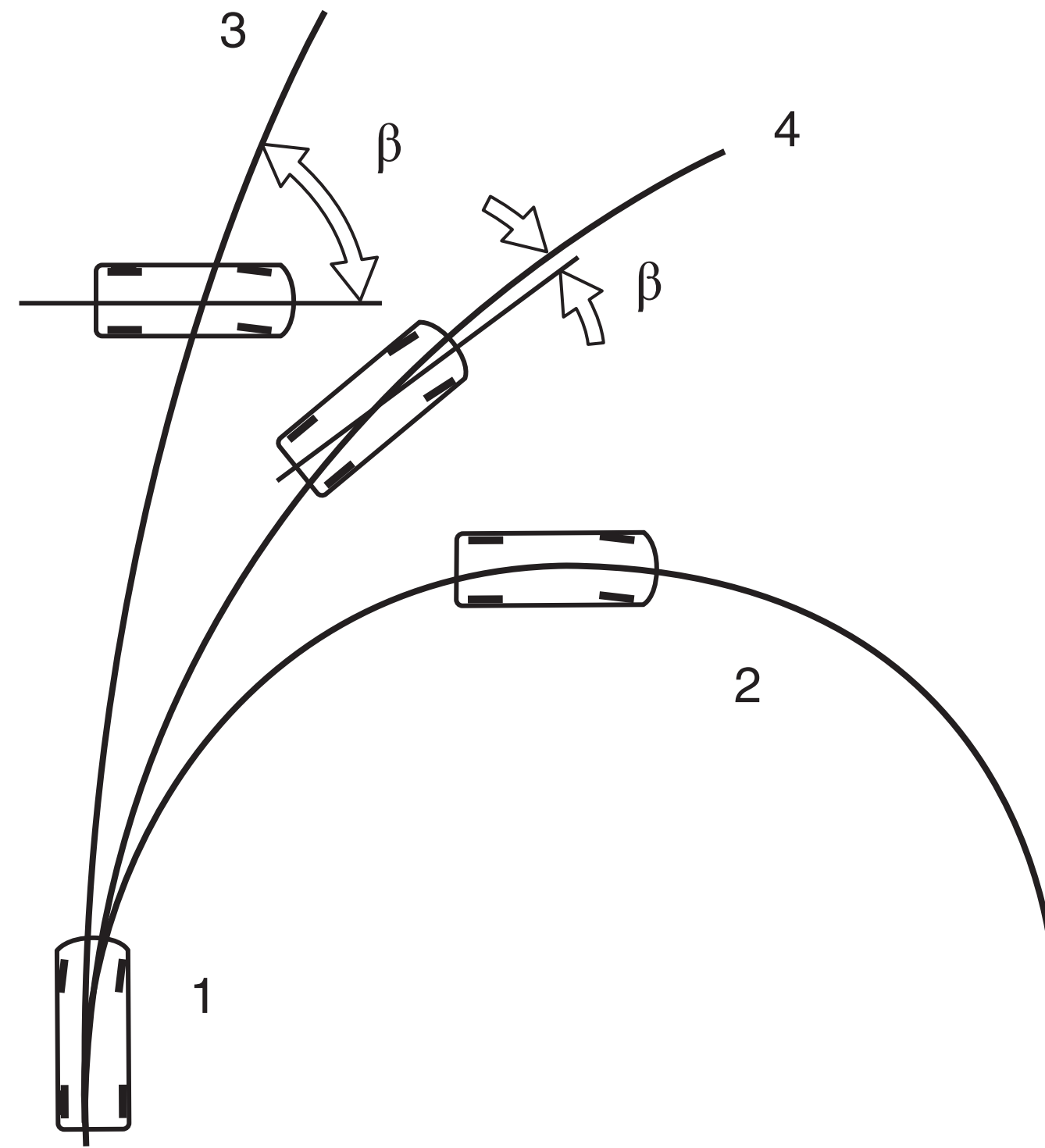
Ett första villkor på reglerfunktionen:

Reglera Ω_z

Detta är bakgrunden till den ursprungligen vanliga termen
AYC - Active Yaw(-rate) Control.

Det är viktigt att inse att det inte räcker med konstant Ω_z , dvs konstant yaw-rate.

Figur 5.23



- 1 STEP INPUT AT STEERING WHEEL
- 2 ON HIGH FRICTION ROAD
- 3 ON SLIPPERY ROAD WITH STEERING CORRECTION AND YAW RATE CONTROL
- 4 ON SLIPPERY ROAD WITH BOTH YAW RATE AND SIDE SLIP ANGLE CONTROL

Krav på kunskap om bilens uppförande

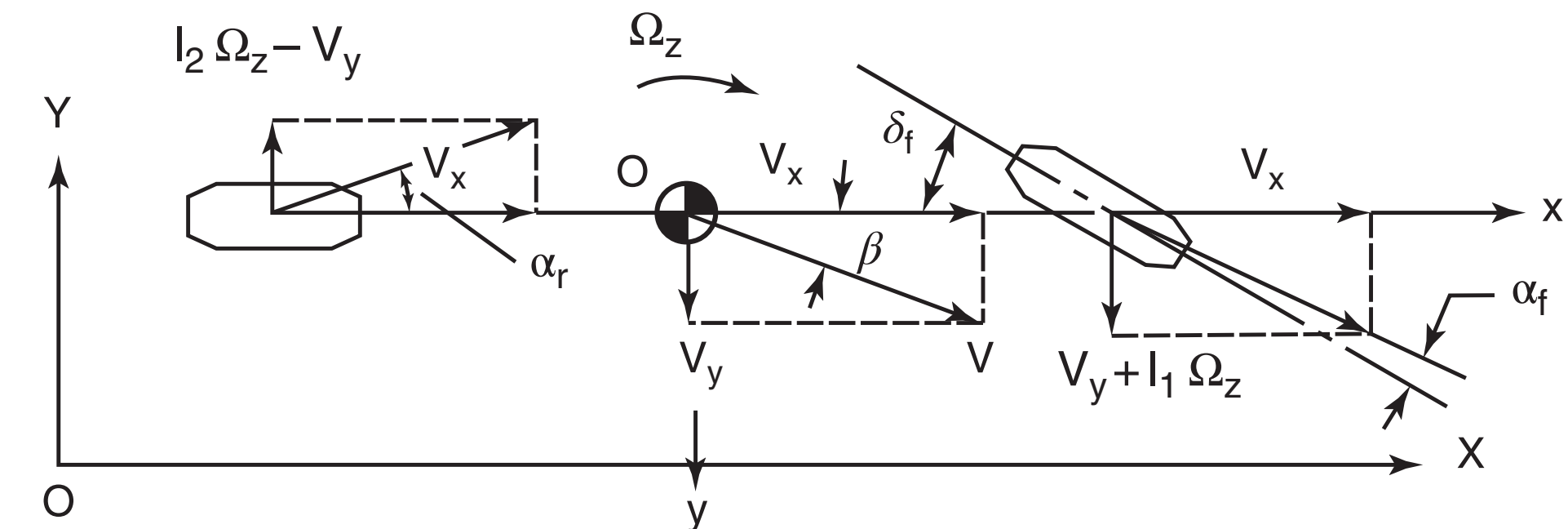
Villkoret på sidrörelse som kan formuleras i V_y men det normala är att införa fordonets sidavdrift β

Definiera fordonets sidavdrift (body slip på engelska)

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

Vi får ett andra villkor på reglerfunktionen: Reglera β

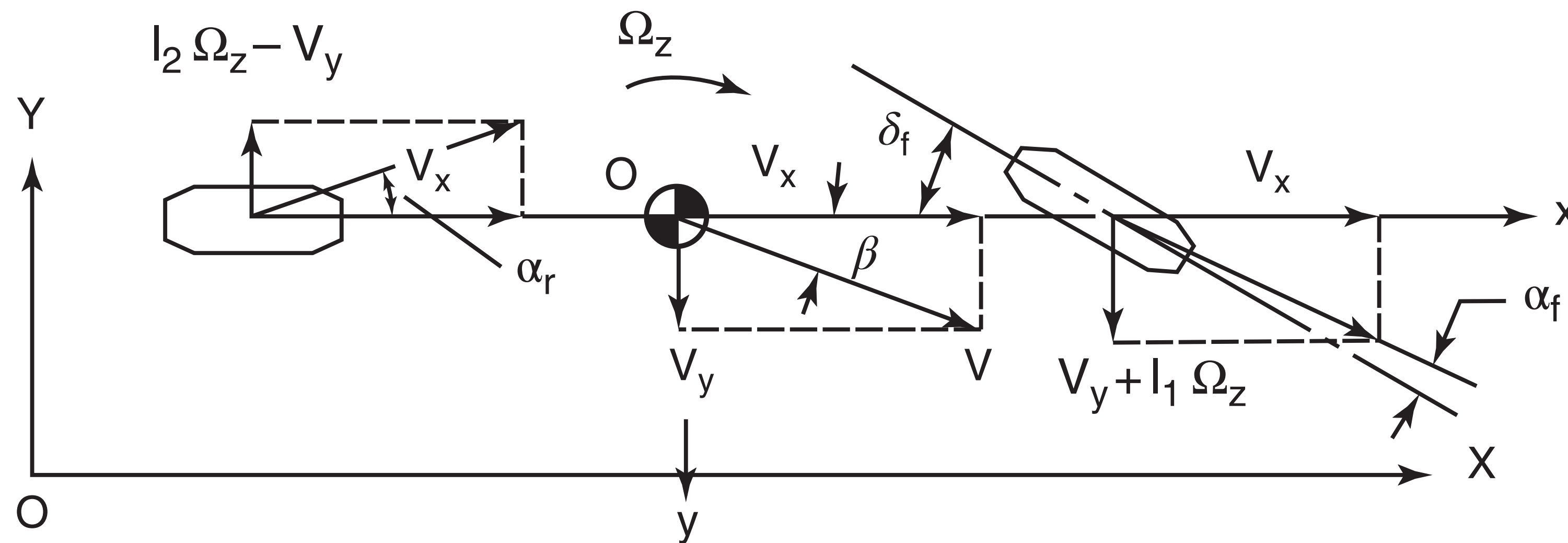
Detta är bakgrunden till att den ursprungligen vanliga termen *AYC - Active Yaw(-rate) Control* inte är lika populär längre.



Krav på kunskap om bilens uppförande

Slutsatsen att det krävs två variabler att reglera på.

Vi väljer Ω_z och β .



Önskvärt beteende

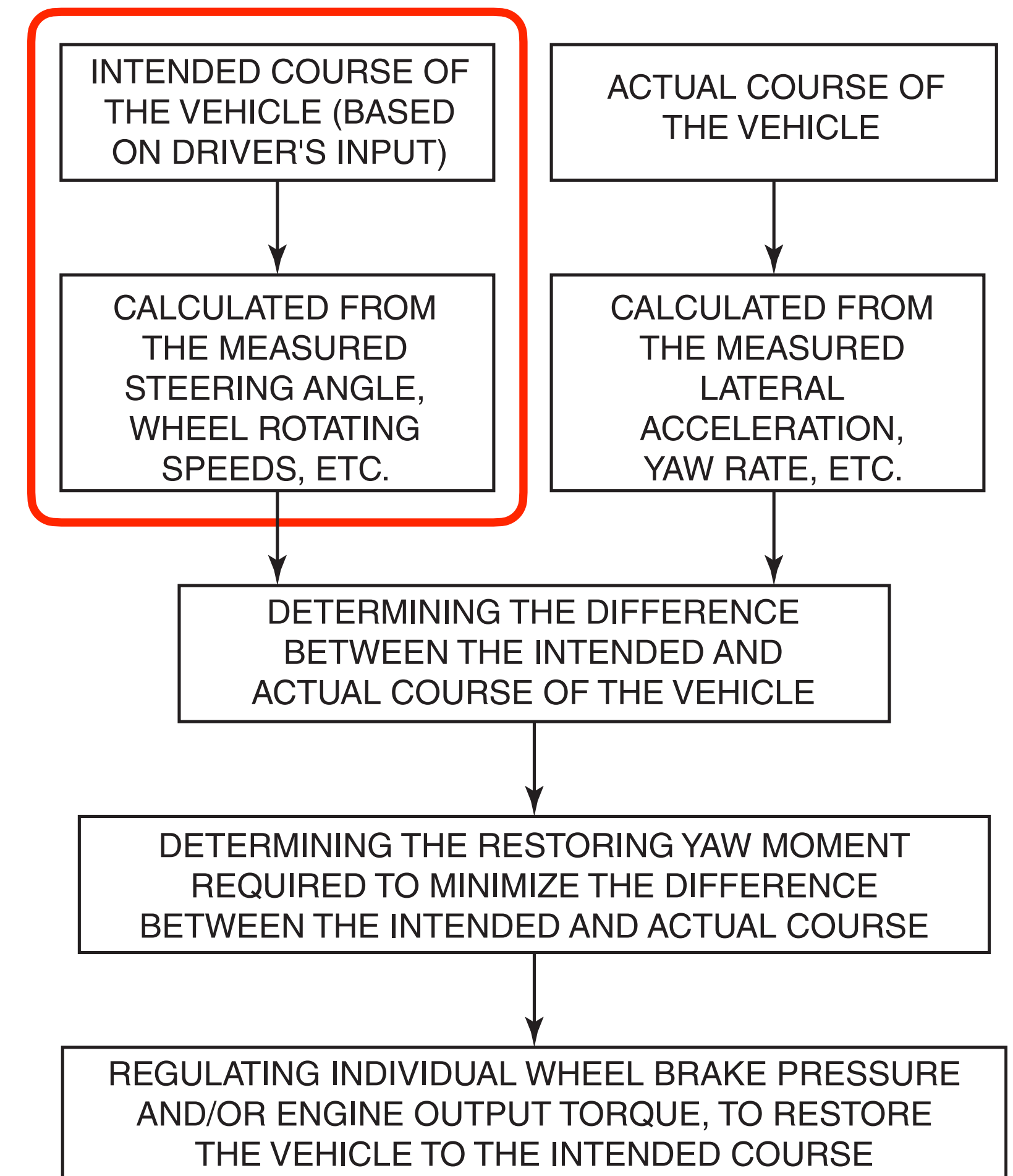
Regleruppgiften består alltså i att reglera Ω_z och β .

Vilka börvärden ska man använda?

Här kommer föraren in i bilden och vad vet vi om personen bakom ratten?

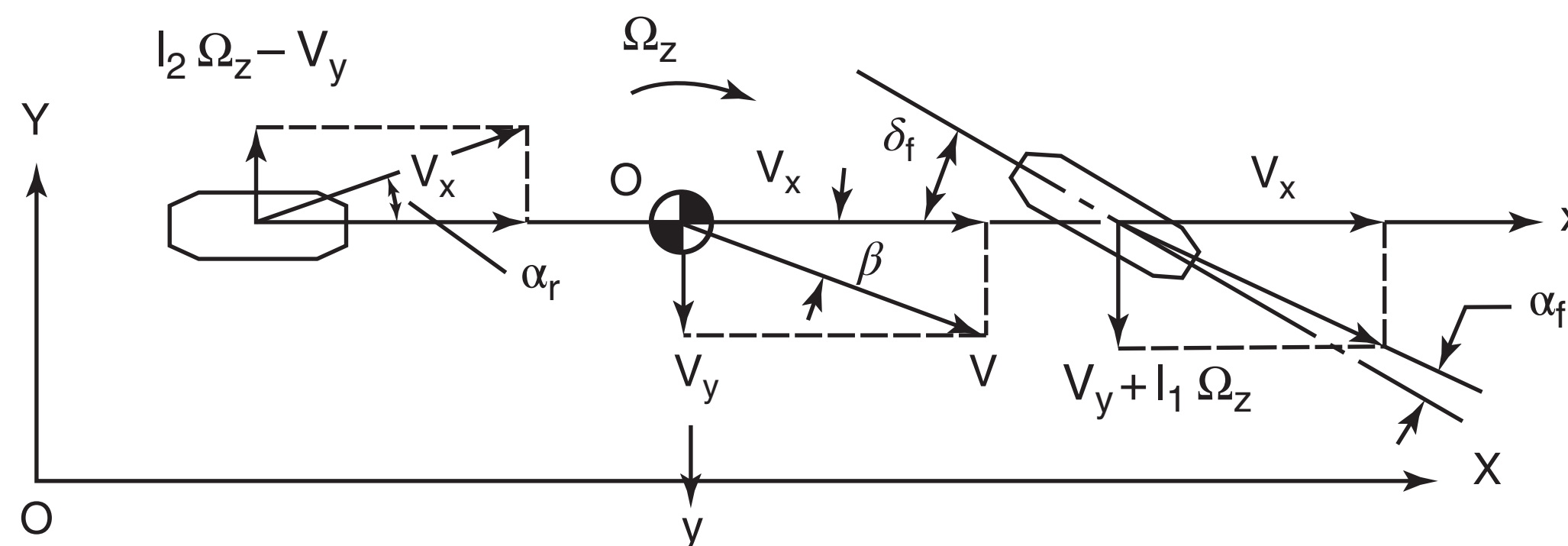
Det vi vet är som vanligt förarens agerande på sina reglage: ratt, pedaler och växelspak. (De två senare är inte primära här men är viktiga för underliggande reglering som ABS/TC.)

Uppgift: relatera styrvinkel, δ , till börvärden på Ω_z och β .



Önskat beteende: Girvinkelhastigheten

Hur ska vi relatera styrvinkel, δ , till lämpliga börvärden på Ω_z och β som beskriver ett gott uppförande hos fordonet. Utgår från värdena vid stationär kurvtagning.



$$\delta_f = \frac{L}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR}, \quad \Omega_z = \frac{V}{R}$$

Eliminerar vi kurvradien R så får vi sambandet

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

Önskat beteende: Sidavdrift

Som vanligt gäller

$$\delta_f = \frac{L}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR}$$

I **triangeln** ser vi att

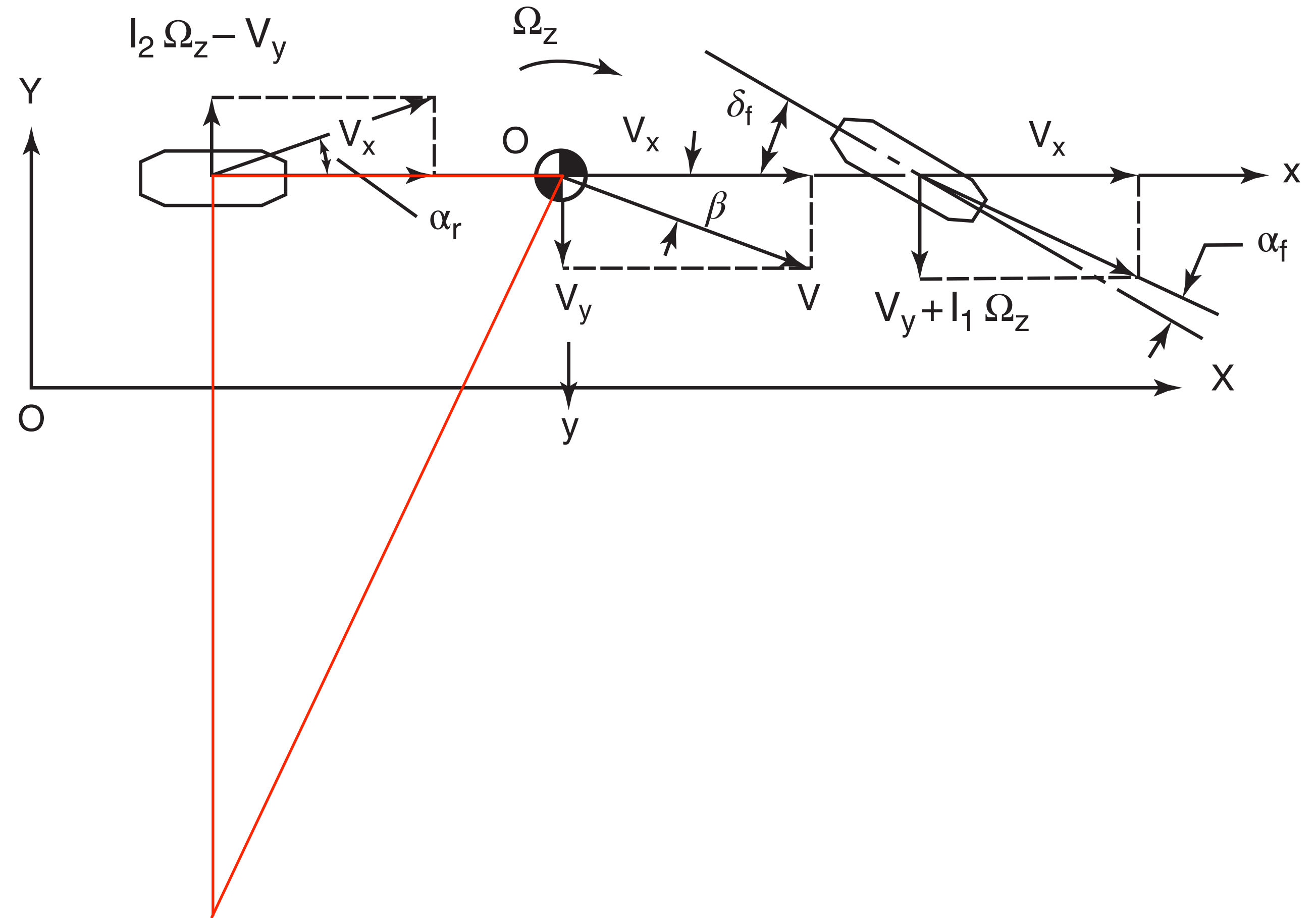
$$\beta^{nom} = \frac{l_2}{R} - \alpha_r$$

Från föreläsning 4:

$$\alpha_r = \frac{W_r}{C_{ar}} \frac{a_y}{g} = \frac{l_1 m V^2}{2C_{ar} L R}$$

Tillsammans ger ovanstående sambandet

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V^2}{2C_{ar} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$



Reglermål

Vi är nu redo att formulera reglermålen (i matematiska termer)

Reglera bilen så att den reagerar på rattutslag, δ , så att girvinkelhastighet, Ω_z , och sidavdrift, β , beter sig som under stabil stationär kurvtagning.

Välj som referensvärden

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

och

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V^2}{2 C_{\alpha_r} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

Övergripande funktion

Vi har nu kommit en bit på väg.

För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende.
Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns,
och till underliggande reglersystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.

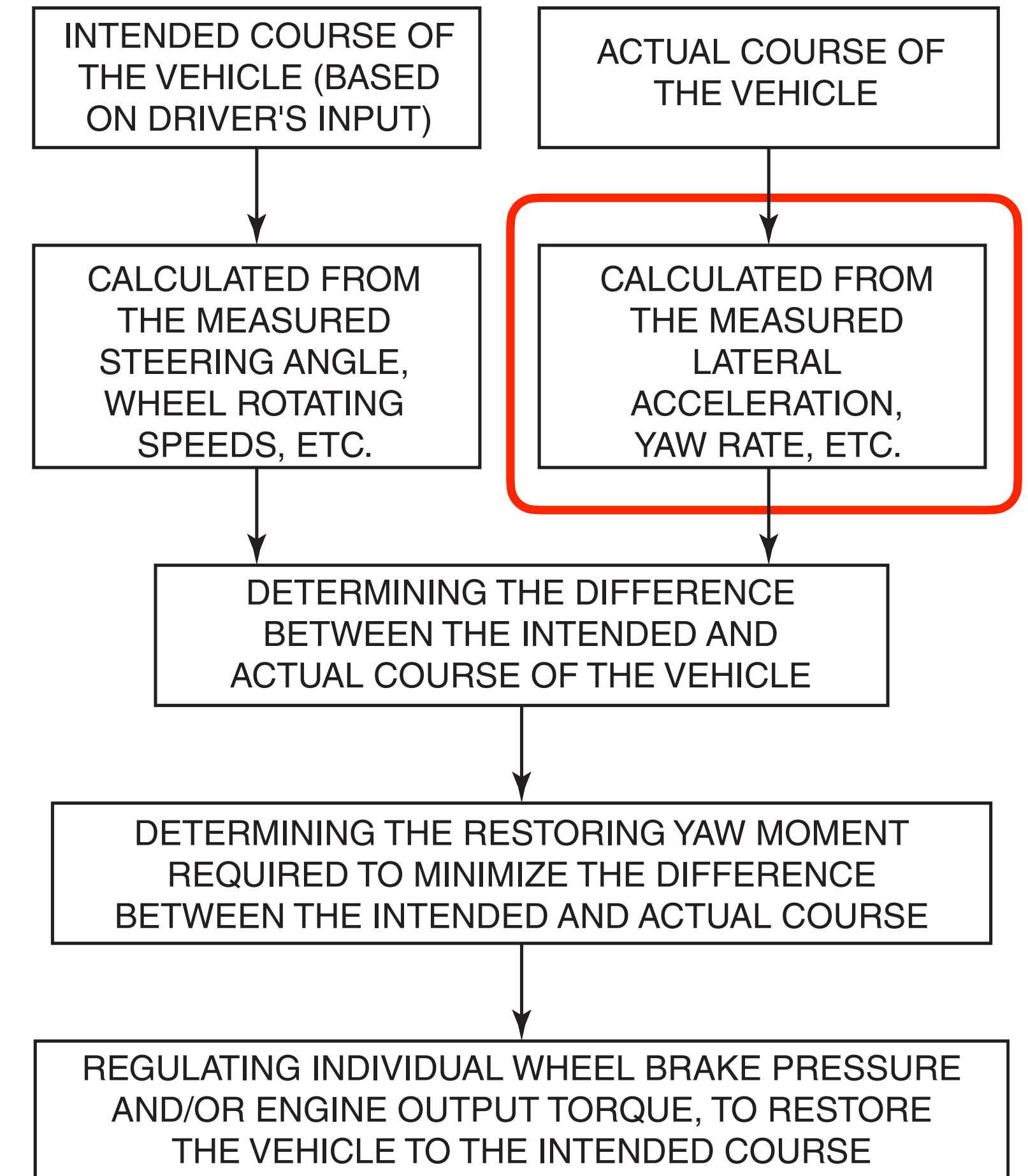
Vi ska nu översiktligt titta på den andra punkten.

Sensorer

Följande sensorsignaler finns tillgängliga:

- $[\delta]$ Styrvinkel [rad].
- $[\dot{\Psi}]$ Girhastighet [rad/s].
- $[\omega_{1,2,3,4}]$ Rotationshastigheter för respektive hjul [rad/s].
- $[a_{lat}]$ Lateral acceleration $[m/s^2]$.

Det finns också sensorer i det hydrauliska bromssystemet, men vi går inte in i sådan detalj.



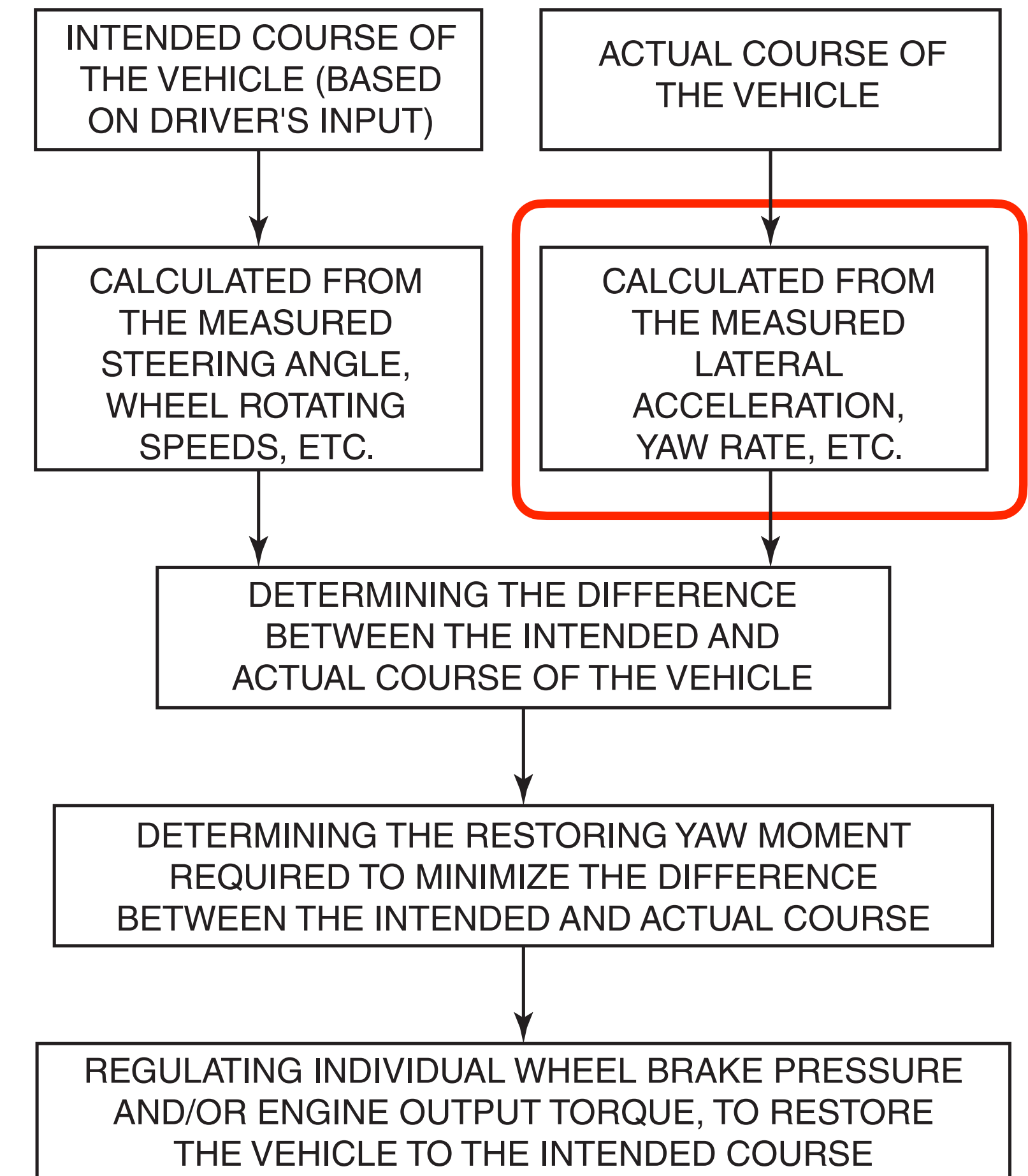
Aktuellt beteende

Uppgift: Bestäm aktuellt Ω_z , V_x och β .

Enklaste ansatsen (tillräcklig i laborationen) är att

- $[\Omega_z]$ bestäms direkt ur sensorn för $\dot{\Psi}$, girhastigheten [rad/s].
- $[V_x]$ bestäms ur $\omega_{1,2,3,4}$ rotationshastigheterna för respektive hjul [rad/s]. Välj rätt hjul.
- $[\beta]$ bestäms genom att integrera a_{lat} laterala accelerationen [m/s²].

Då får man V_y och med användning av V_x ovan erhåller man via definitionsformeln β



Aktuellt beteende

Uppgift: Bestäm aktuellt Ω_z , V_x och β .

Enklaste ansatsen kan förbättras.

Vi vet att dynamiken i ett förenklat fall ges av
 $M\dot{\mathbf{u}} + A\mathbf{u} = B\delta$

Det är naturligt att förbättra estimeringen av Ω_z , V_x och β genom att använda en observatör.

Styrlag

Inför ΔM , Korrigerande moment kring bilens masscentrum som mellanstyrvariabel.

Antag att vi har nödvändiga variabler såsom $(\delta, v_x, v_y, \dot{\Psi})$ från sensorer och observatörer.

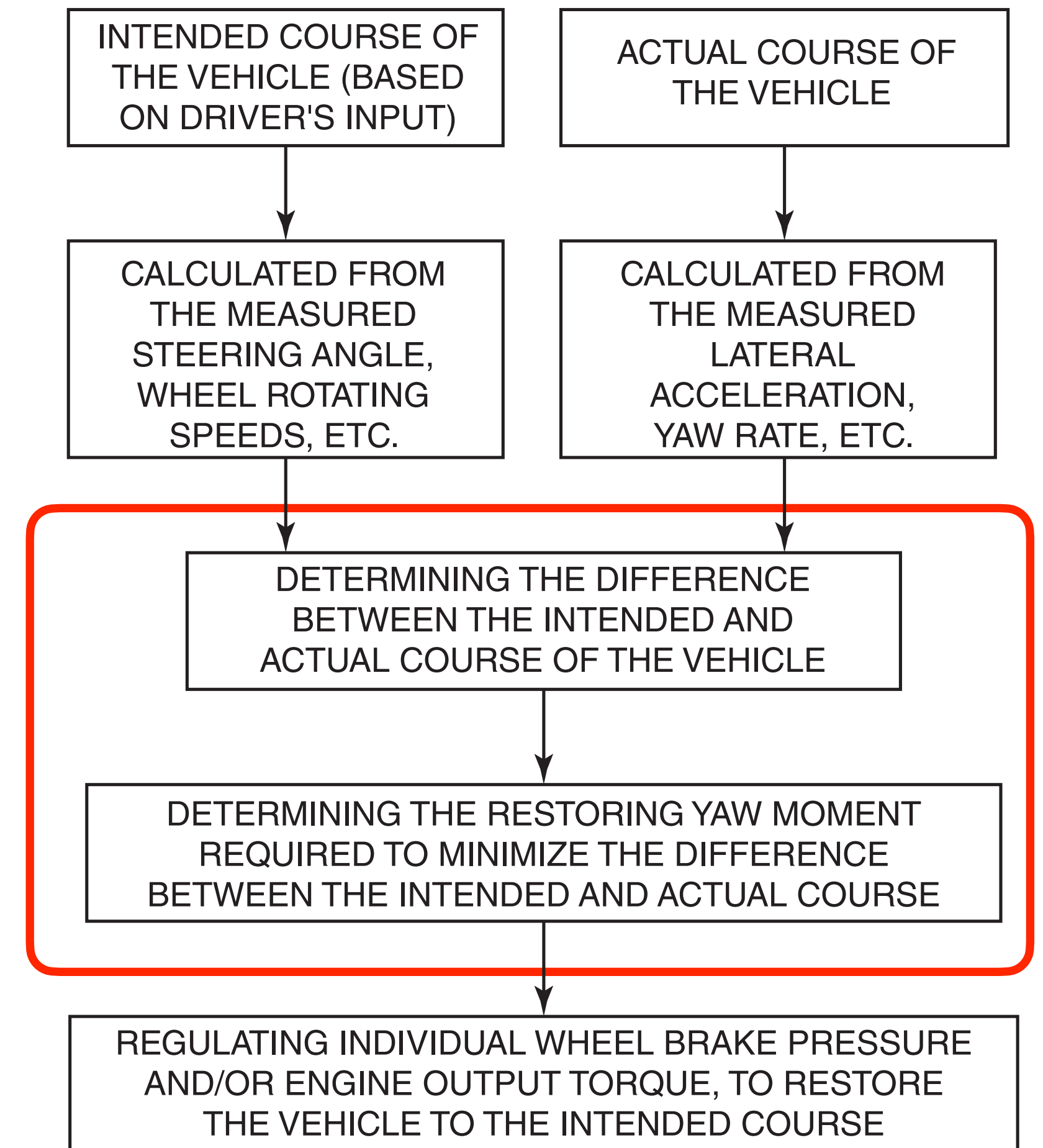
Det gäller alltså att finna en styrlag

$$\Delta M = \Delta M(\delta, v_x, v_y, \dot{\Psi})$$

Välj ΔM så att reglermålen uppnås.

Det är då naturligt att använda

$$\Delta M = \Delta M(\beta^{nom} - \beta, \Omega_z^{nom} - \Omega_z)$$



Styrlag

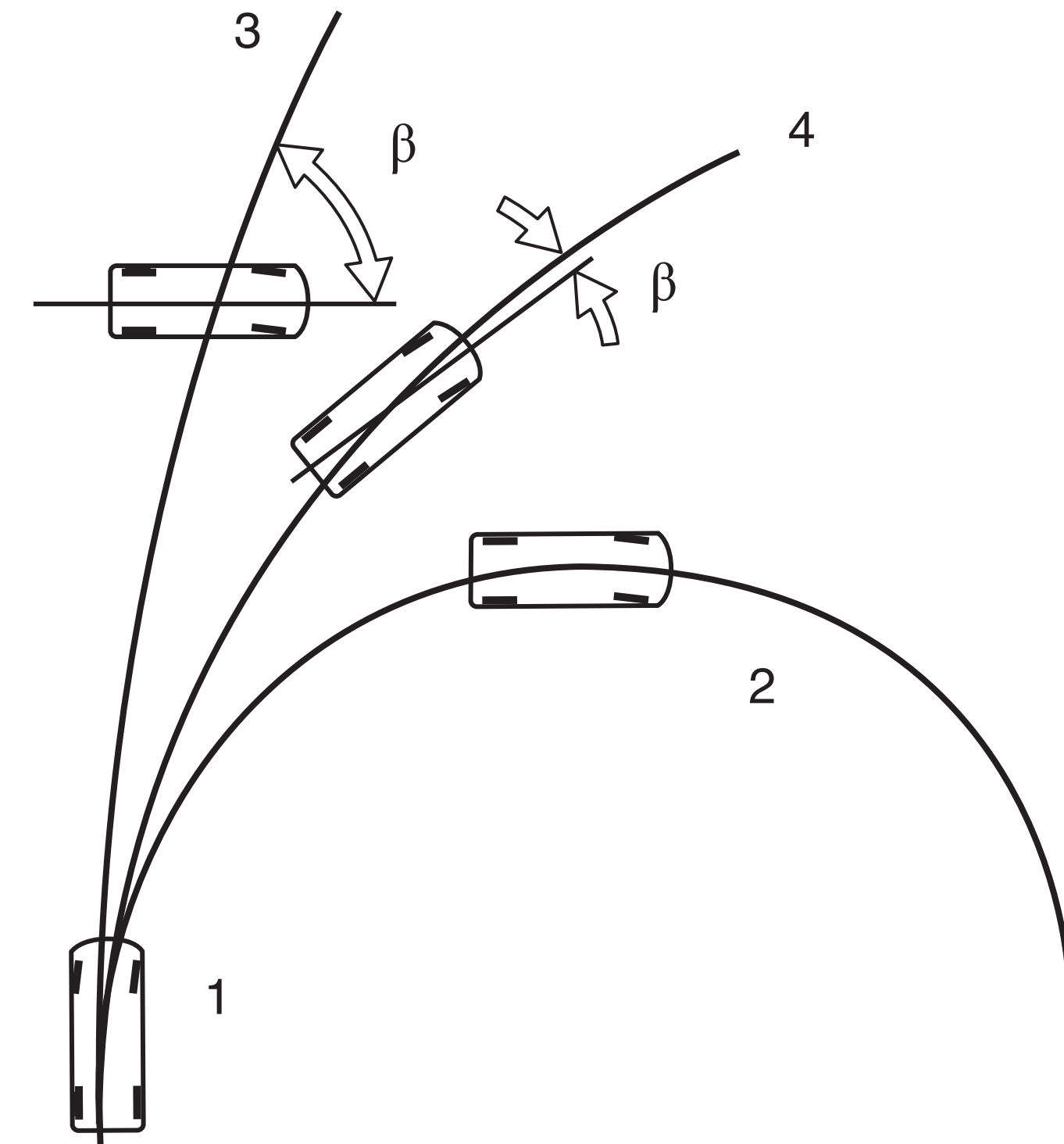
Enklaste ansatsen är att proportionellt återkoppla de två storheter man vill hålla nere

$$\Delta M = k_1(\beta^{nom} - \beta) + k_2(\Omega_z^{nom} - \Omega_z)$$

där k_1, k_2 är regulatorparametrar som trimmas empiriskt.

Notera att $k_1 = 0$ ger ren "yaw-rate control" med möjlig problembild enligt figur 5.23 i Wong.

Fundera på vilka tecken k_1, k_2 ska ha.

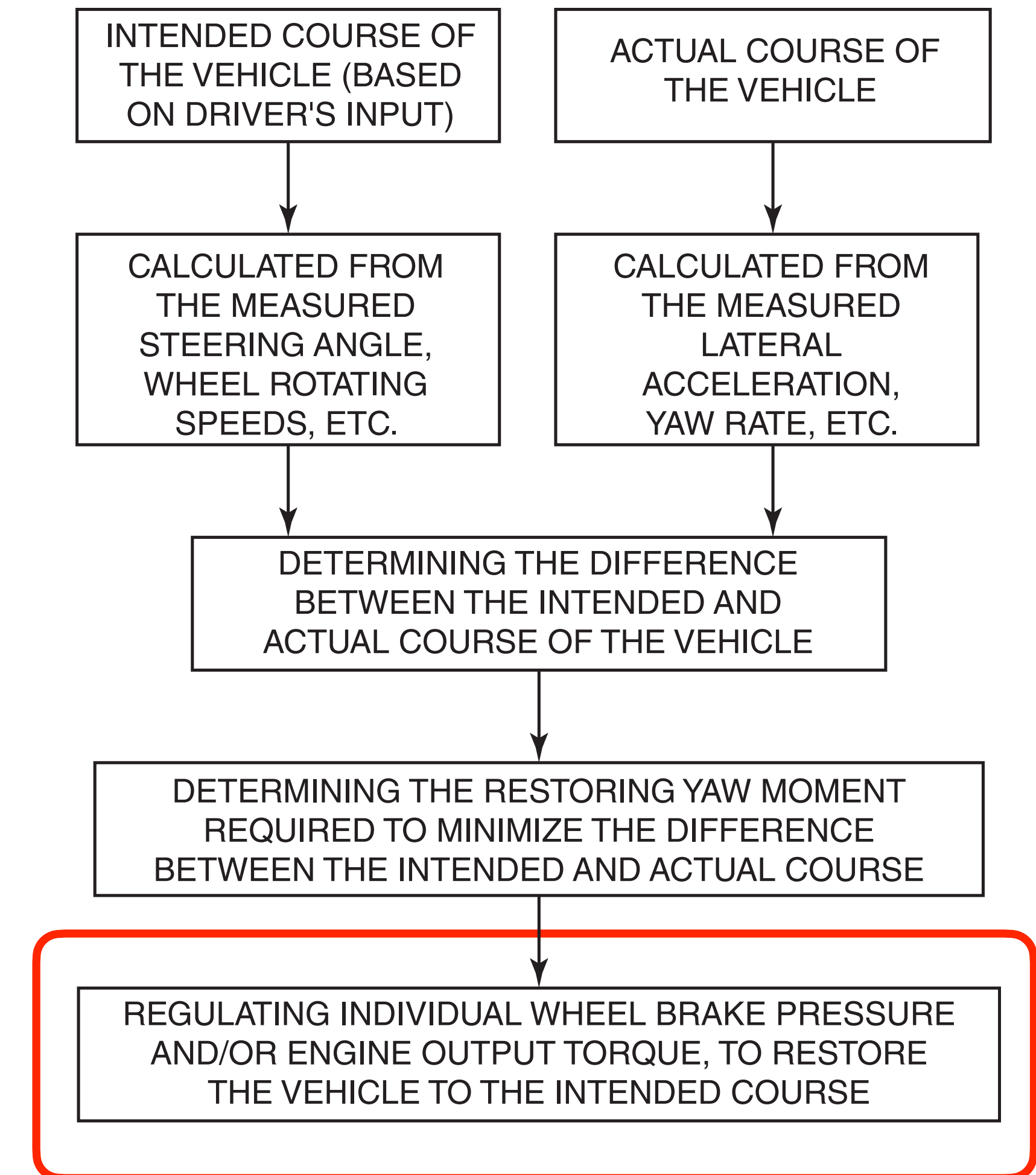


Uppgiften är nu att givet ett önskat moment på bilen, ΔM , skapa detta moment genom att individuellt bromsa olika hjul.

För att realisera detta kan komplicerade strategier användas, men vi begränsar oss nu till en enkel variant som är tillräcklig för laborationen i kursen.

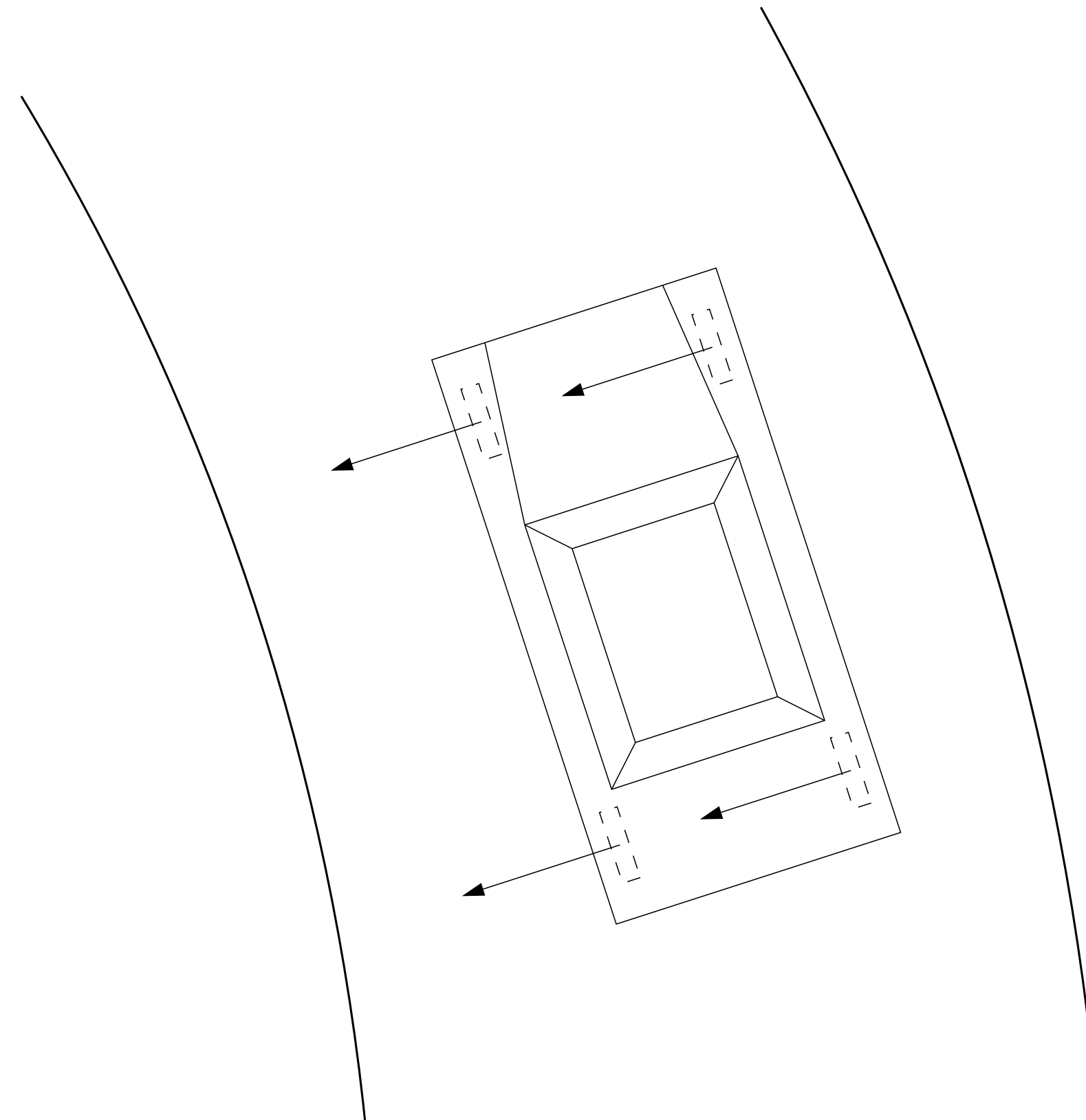
Viktig strategifråga:

Vilket (vilka) hjul ska bromsas i olika situationer?



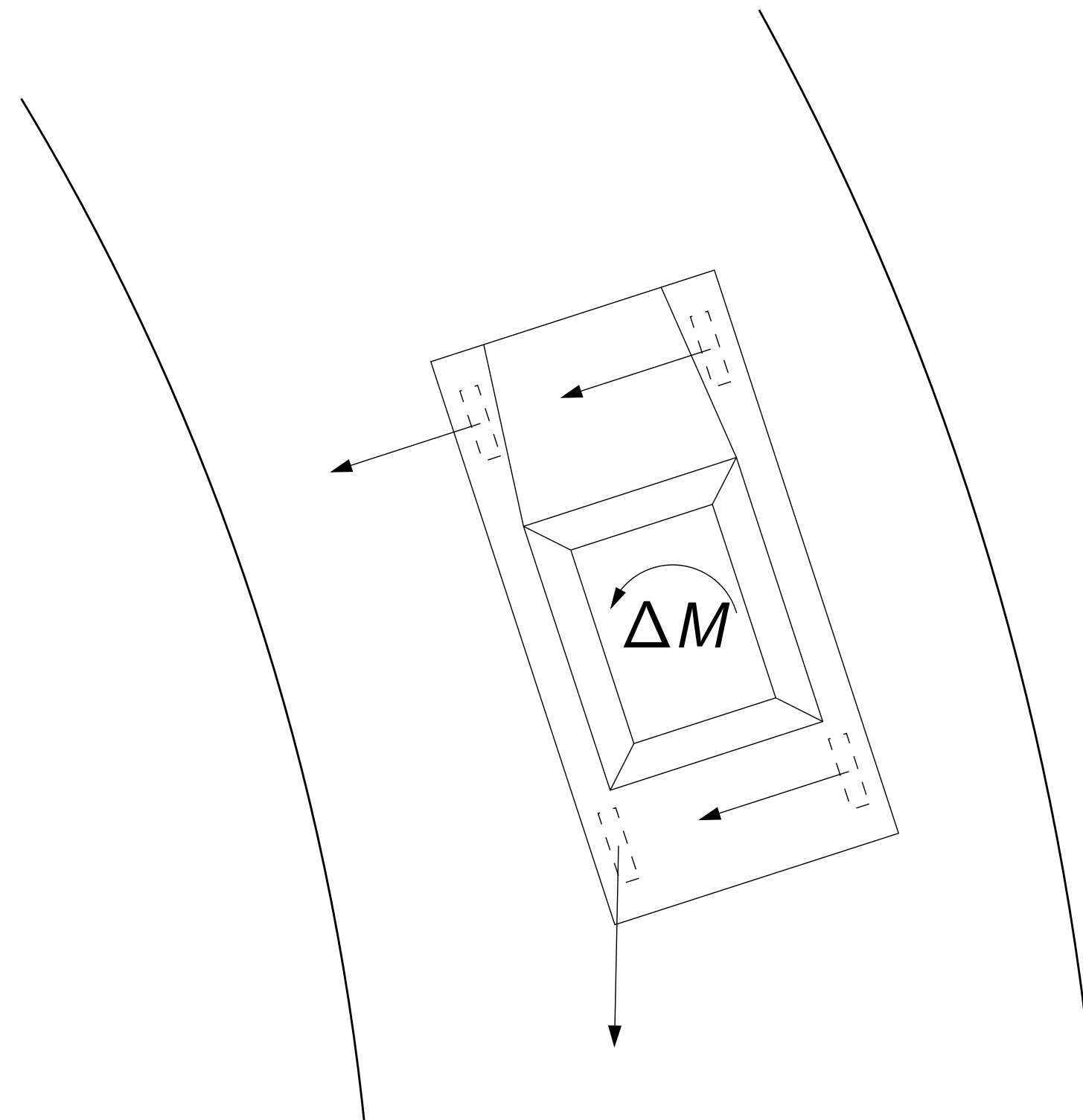
Val av hjul att bromsa

Schematisk skiss av situationen för diskussion av vilket hjul att bromsa



Val av hjul att bromsa

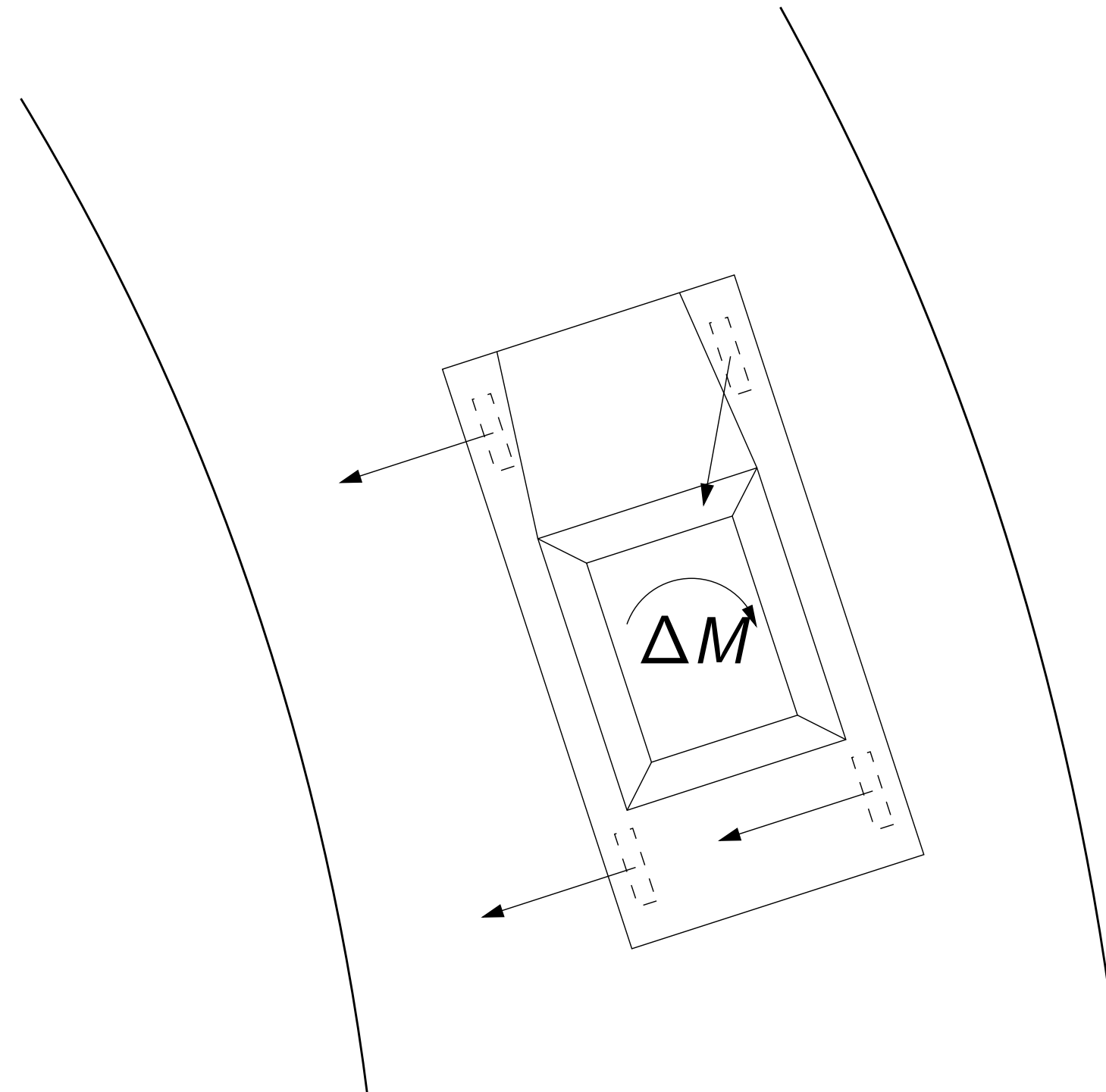
Med ΔM som i figur ska uppenbart ett vänsterhjul bromsas.



Fram eller bak? Sidkraftsanalys ger att det är bak som ska bromsas.

Val av hjul att bromsa

Med ΔM som i figur ska uppenbart ett högerhjul bromsas.



Med bromsat framhjul ger den minskade sidkraften ett moment i önskad riktning.

Effektivering med bromsar

Uppgiften är alltså att givet ett önskat moment på bilen, ΔM , skapa detta moment genom att individuellt bromsa olika hjul.

Strategi:

Vid överstyrning, när ett upprätande moment krävs, bromsas ett framhjul.

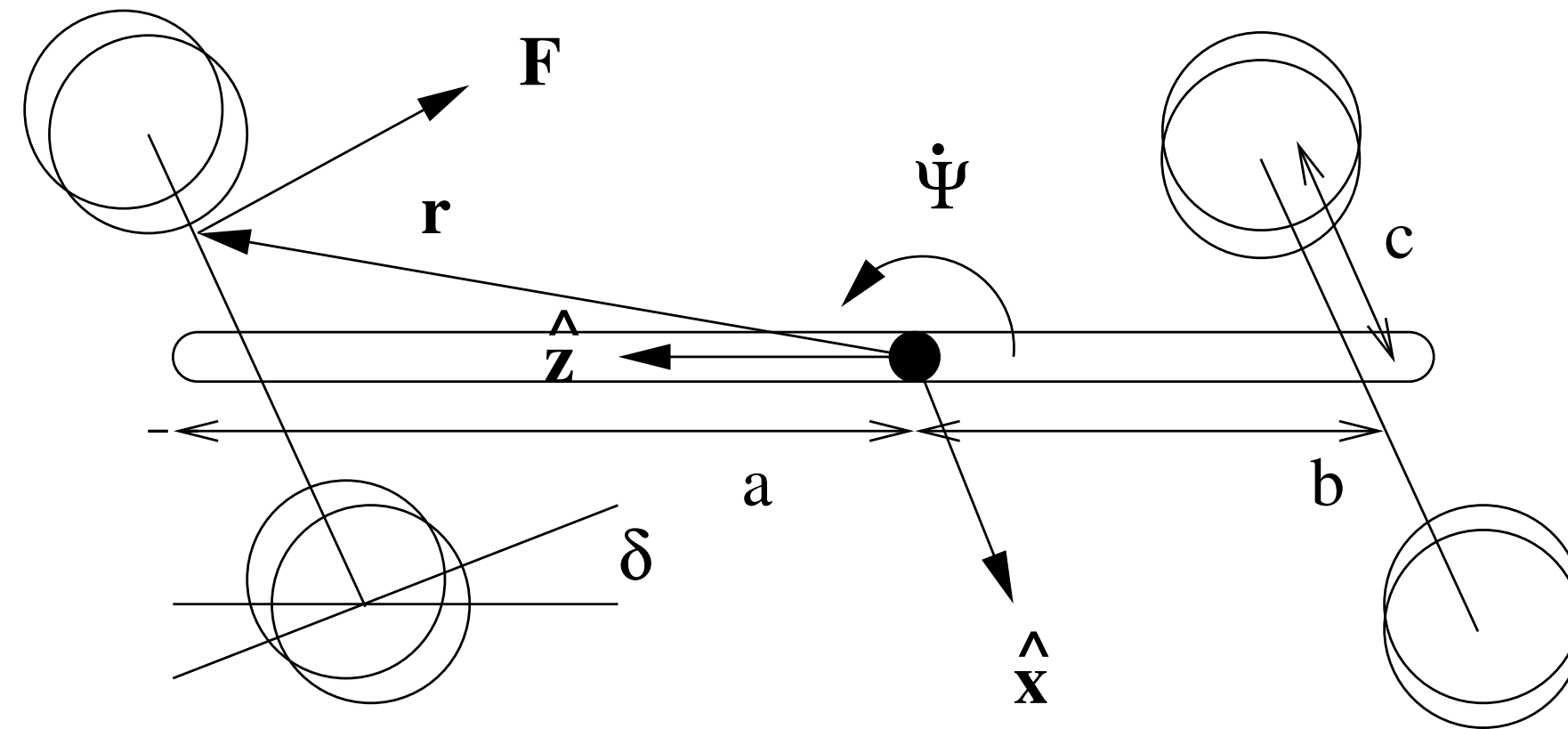
Vid understyrning, när ett vridande moment krävs, bromsas ett bakhjul.

Kvantitativt gäller det att finna den erforderliga bromskraften, F , som funktion av det önskade momentet ΔM och styrvinkel δ .

Löses för de fyra fallen: höger- och vänstersväng, med respektive över- och understyrning.

Effektivering med bromsar, Fall 1

Ett fordon i vänstersväng, $\Omega_z < 0$.



Antag att fordonet överstyr vilket medför $\Delta M > 0$. Styrvinkeln, δ , är i figuren negativ. Ett upprätande moment krävs. Det realiseras genom att bromsa höger framhjul.

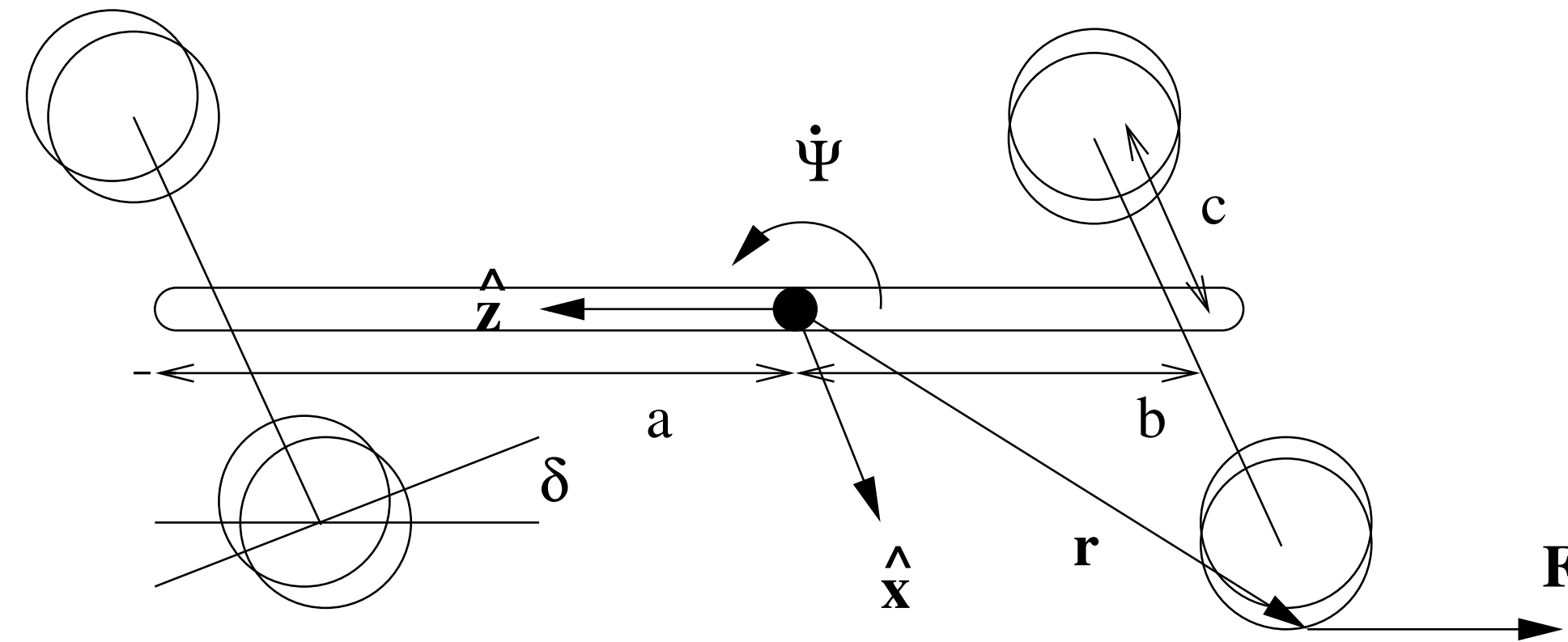
$$r = a\hat{x} + c\hat{y}$$

$$F = |F|(-\cos(-\delta)\hat{x} + \sin(-\delta)\hat{y}) = -|F|(\cos\delta\hat{x} + \sin\delta\hat{y})$$

$$M = r \times F = |F|(-a \sin\delta + c \cos\delta)\hat{z}$$

Effektivering med bromsar, Fall 2

Ett fordon i vänstersväng, $\Omega_z < 0$.



Antag att fordonet understyr vilket medför $\Delta M < 0$. Styrvinkeln, δ , är i figuren negativ.

Ett vridande moment krävs. Det realiseras genom att bromsa vänster bakhjul.

$$r = -b\hat{x} - c\hat{y}$$

$$F = -|F|\hat{x}$$

$$M = r \times F = -|F|c\hat{z}$$

Effektivering med bromsar, Fall 3 & 4

De två återstående fallen gäller fordon i högersväng, $\Omega_z > 0$, och är analoga med vänstersväng.

Notera dock olika teckenbyten.

Antag att fordonet överstyr.

Ett upprätande moment realiseras genom att bromsa vänster framhjul, och momentet som krävs är mindre än noll.

Antag att fordonet understyr.

Ett vridande moment realiseras genom att bromsa höger bakhjul, och momentet som krävs är större än noll.

Effektivering med bromsar

I samtliga fall löses den erforderliga bromskraften, F , ut ur sista ekvationen som funktion av det önskade momentet ΔM och styrvinkel δ .

Vid en verklig realisering tillkommer att hantera det underliggande bromssystemet så att man erhåller de bromskrafter man önskar men vi går inte in på detta.

Problem kring förarbeteende

Det visar sig att många förare överreagerar i utsatta situationer. Vid sladd yttrar det sig i alltför häftiga rattutslag.

Problemställning: Finns det några vettiga åtgärder som kan införlivas i styrsystemet?

Tillägg för hantering av förarbeteende

Häftiga rattutslag resulterar via

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

och

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V^2}{2 C_{\alpha_r} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

i för stora nominella värden.

Hur kan man begränsa Ω_z^{nom} och β^{nom} ?

Tillägg för hantering av förarbeteende

Det är inte lönt att kräva större sidkrafter än underlaget medger i förhållande till farten.

$$\text{Vi har } F_{y_{max}} = ma_{y_{max}} < \mu mg \}$$

Nu vet vi inte μ men kan skaffa oss en uppfattning via $a_{y_{trigg}} = \mu g$ när det börjar sladda.

$$\text{Vi har också } a_y = \dot{V}_y + V_x \Omega_z$$

Ansätter vi lite grovt att $\dot{V}_y = 0$ precis i starten av sladden så får vi

$$\Omega_z^{nom} < \frac{\mu g}{V_x}$$

Inför denna begränsning i styrsystemet.

Tillägg för hantering av förarbeteende

Vi får

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V}{L + K_{us}V^2/g} \delta \quad \text{om} \quad \Omega_z^{nom} < \left| \frac{\mu g}{V_x} \right|$$

$$\Omega_z^{nom} = \left| \frac{\mu g}{V_x} \right| \text{sign}(\Omega_z^{nom}) \quad \text{annars}$$

Notera att detektering/diagnos krävs utöver filtrering (observatör) för att identifiera att sladd sker.

Ansatsen $\dot{V}_y = 0$ i starten av sladden är grov så om man säger att den termen tar maximalt 15 % av a_y så kan man använda

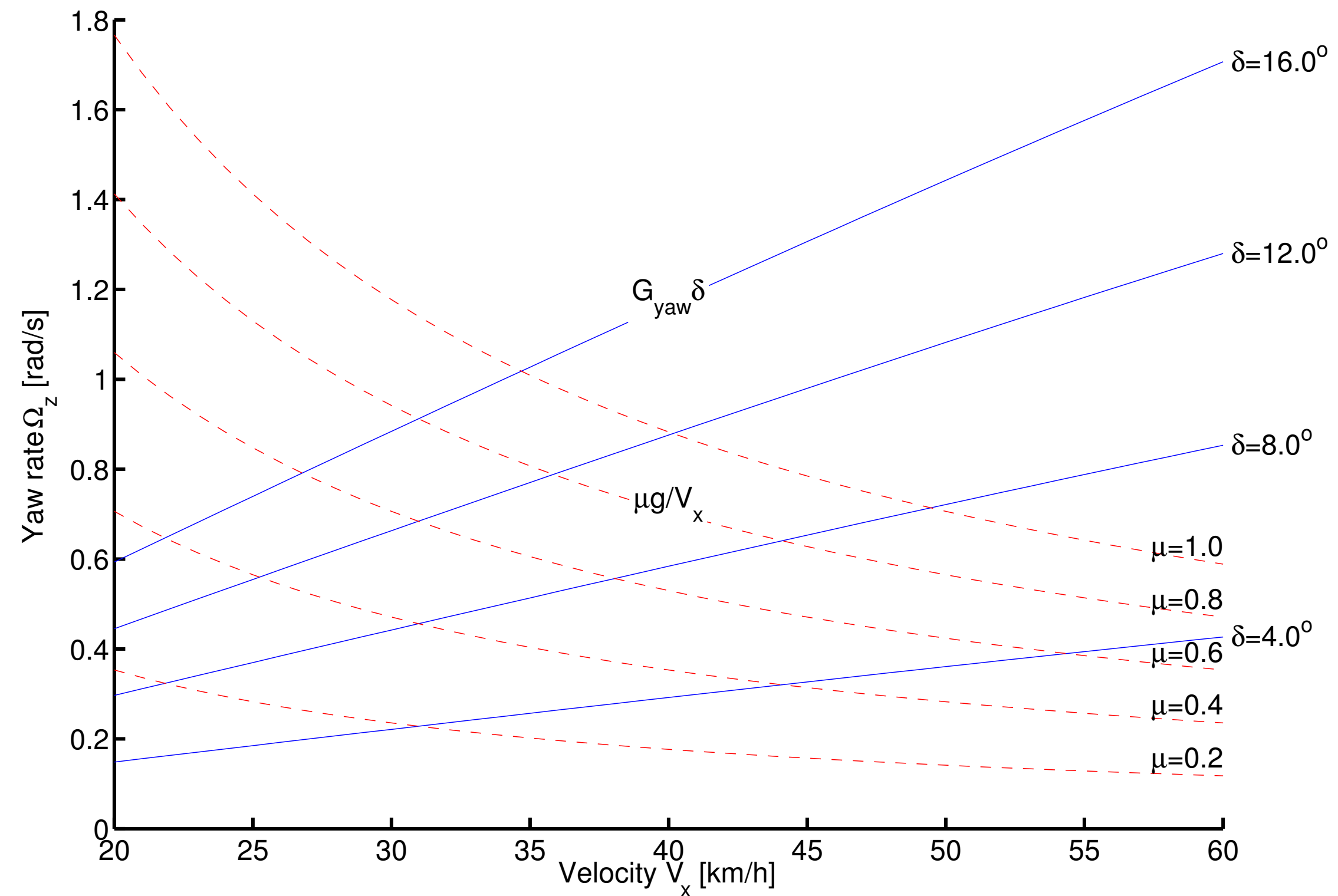
$$\Omega_z^{nom} < \left| 0.85 \frac{\mu g}{V_x} \right|$$

Tillägg för hantering av förarbeteende

Exempel på begränsning av Ω_z

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

$$\Omega_z^{nom} < \frac{\mu g}{V_x}$$



Tillägg för hantering av förarbeteende

Begränsning av β_{nom} ?

Illustrerar med en empirisk gräns

$$\beta_{max}^{nom} = \text{atan}(0.02\mu\text{g})$$

En bakgrund till att den fungerar är att β är liten när man har kontroll på fordonet. (I laborationen kan man använda $\beta^{nom} = 0$ med gott resultat.)

Tillägg för hantering av förarbeteende

Man får alltså

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V^2}{2C_{\alpha_r} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f \quad \text{om} \quad |\beta^{nom}| < \text{atan}(0.02\mu g)$$

$$\beta^{nom} = |\text{atan}(0.02\mu g)| \text{sign}(\beta^{nom}) \quad \text{annars}$$

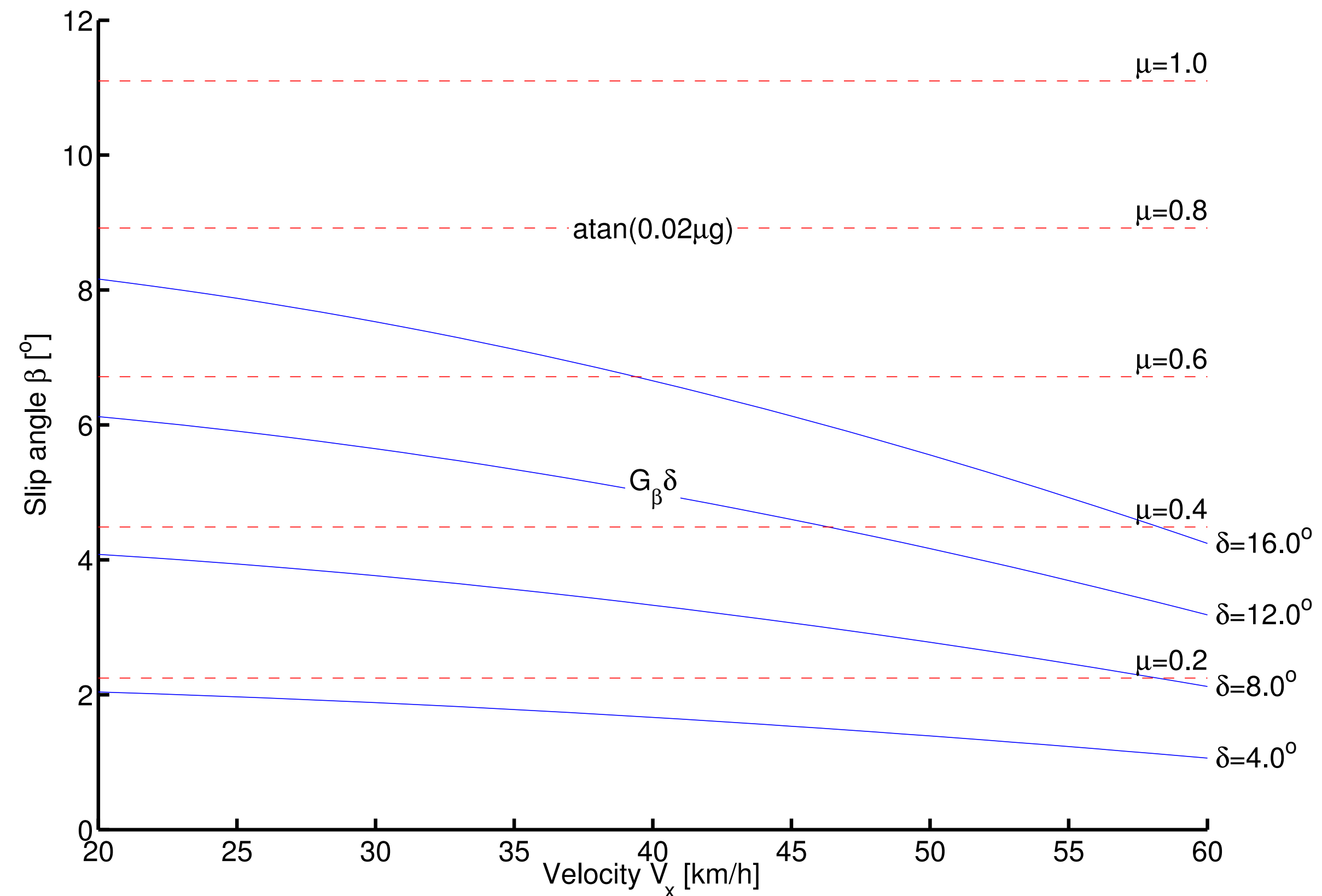
där man skattar μg på som innan.

Tillägg för hantering av förarbeteende

Exempel på begränsning av β^{nom}

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V^2}{2 C_{\alpha_r} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

$$|\beta^{nom}| < \text{atan}(0.02\mu g)$$



Tillägg för hantering av förarbeteende

Man kan gå vidare och införa filtrering/fördröjningar innan man låter rattutslag slå igenom i börvärdena.

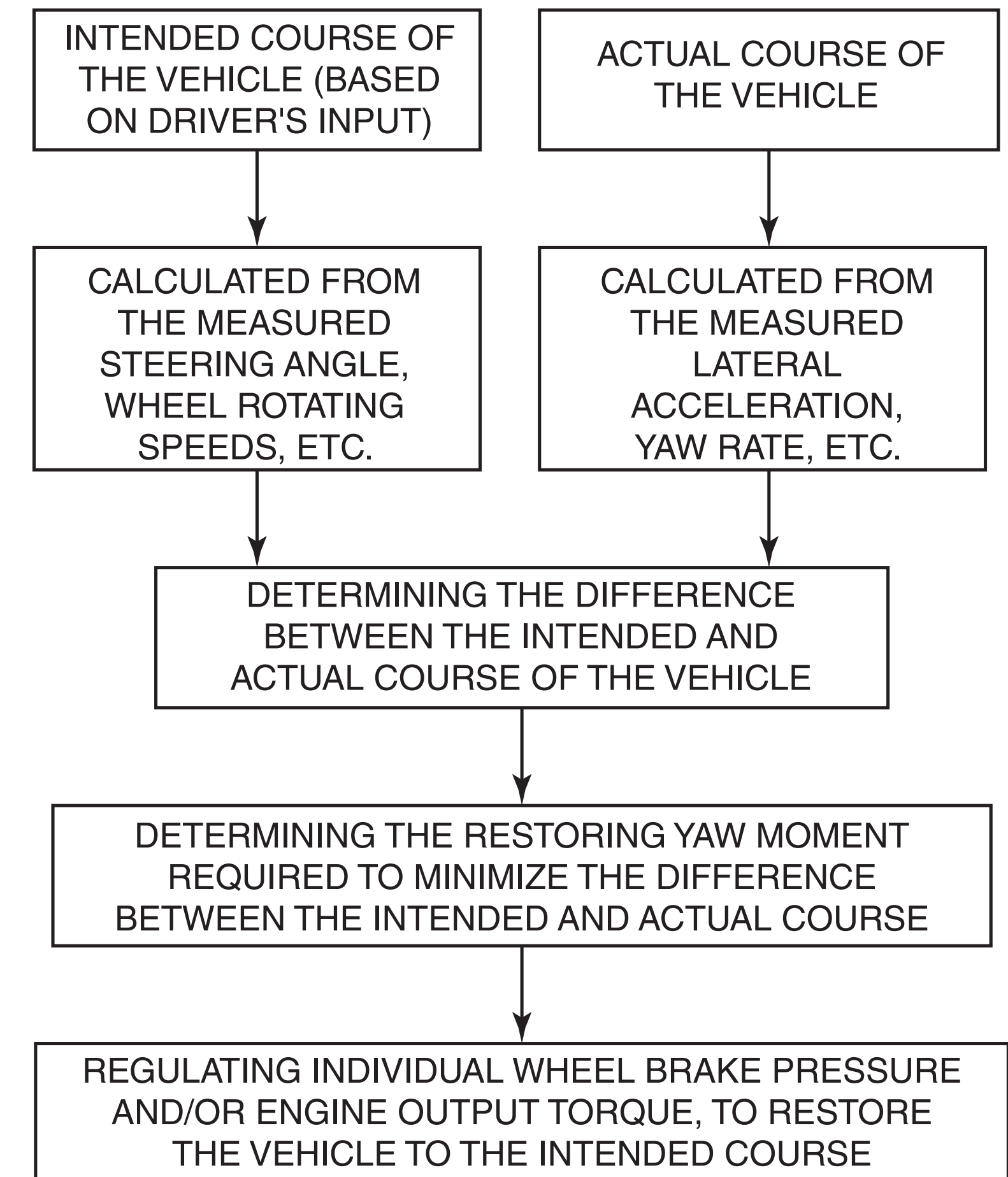
Man har också en dödzon på ΔM , dvs den måste vara större än en tröskel för att påverka bromsning av hjul. Det ska alltså inte hända hända något under normal körning. Detta sparar också bränsle eftersom något hjul i annat fall skulle småbromsa hela tiden.

Övergripande funktion

Vi har nu kommit igenom hela kedjan.

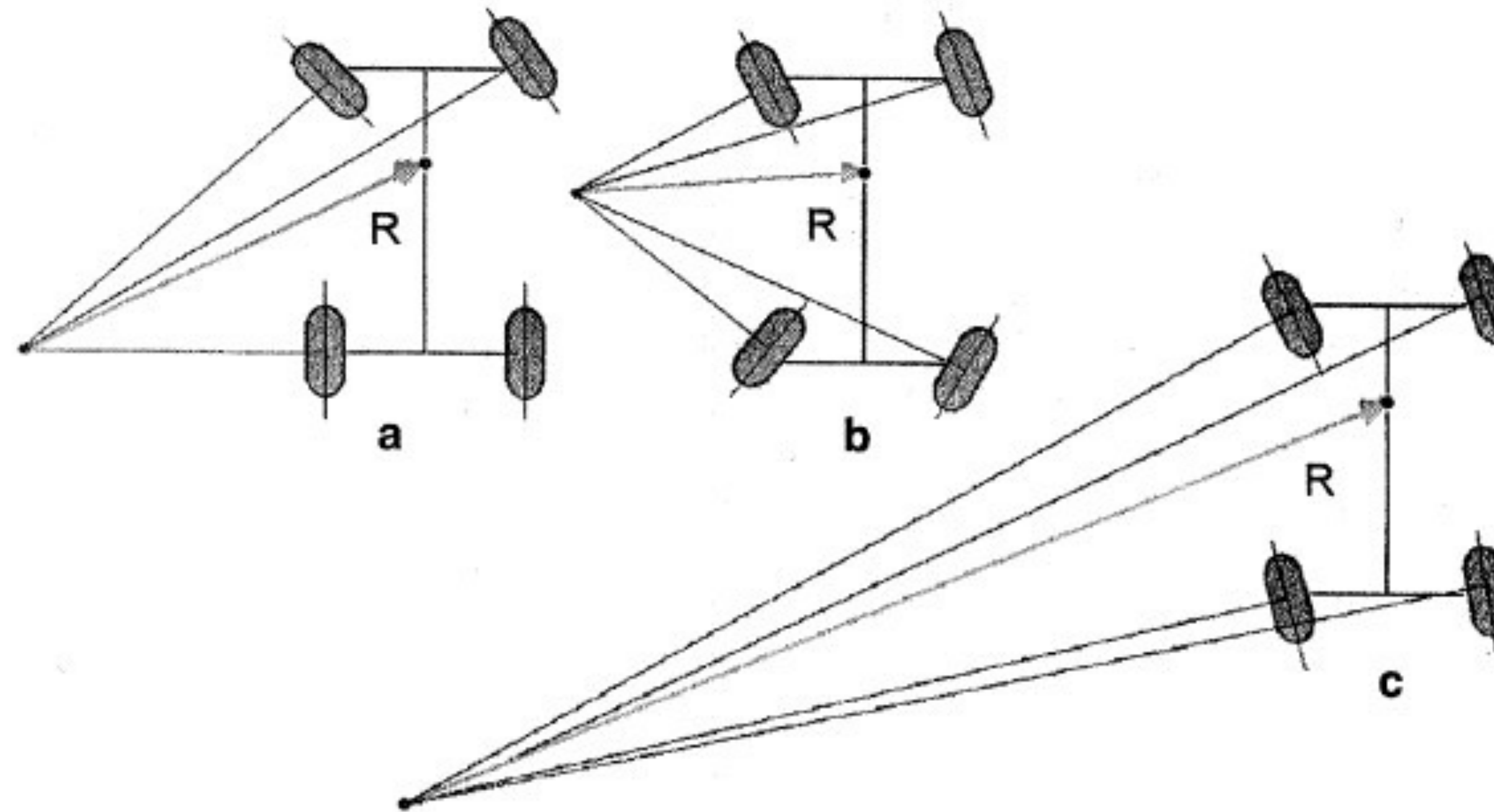
För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande reglersystem
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.



Four-Wheel Steering

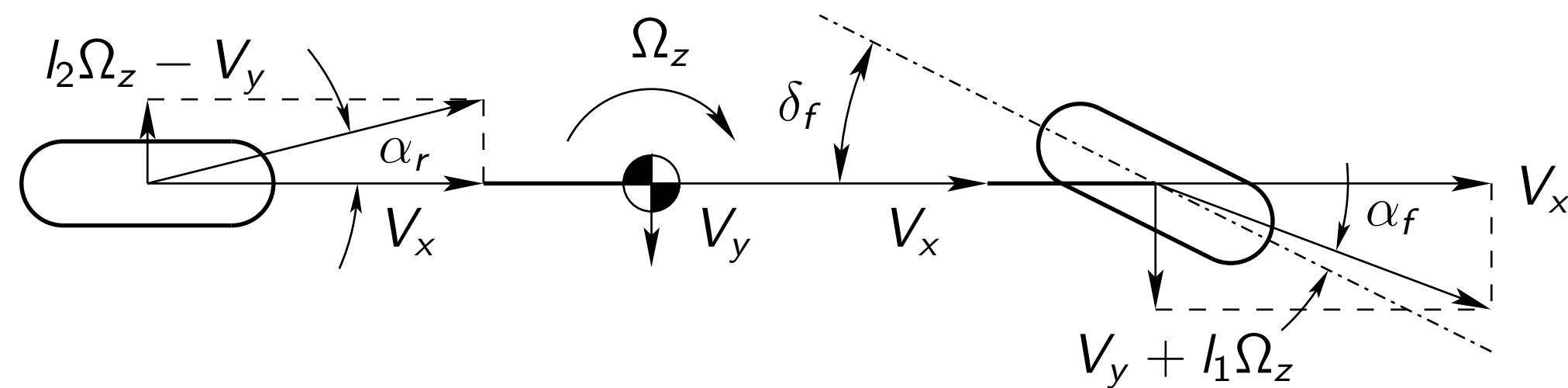
Four-wheel steering



a: Front-wheel steering

b and c: Four-wheel steering

From the previous lecture



Kinematics from the figure

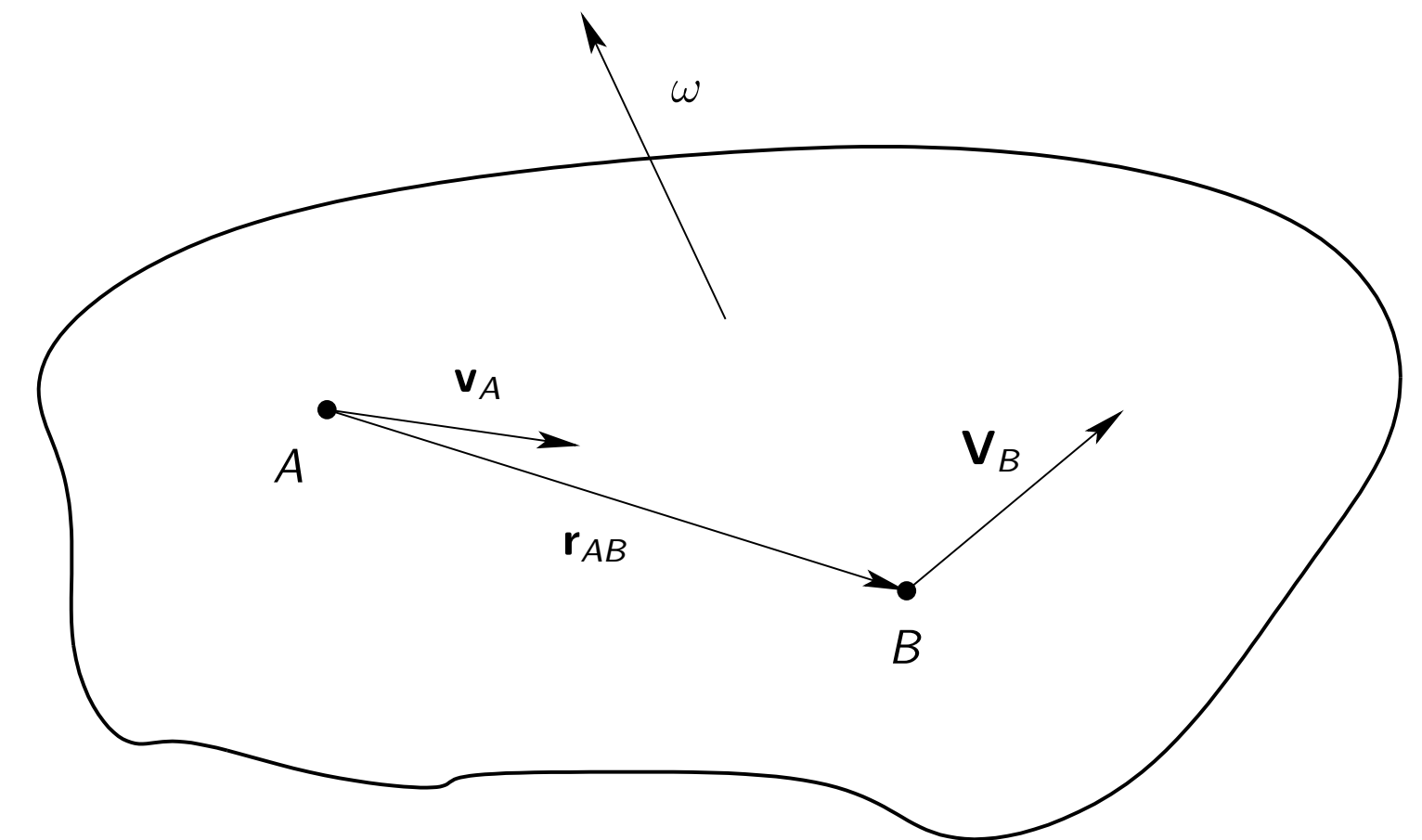
$$\alpha_f = \delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x}$$

$$\alpha_r = \frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x}$$

Model for tire forces

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \alpha_f$$

$$F_{yr} = 2C_{\alpha r} \alpha_r$$



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

From now it will be assumed that the longitudinal velocity V_x is constant and it will be play the role of a parameter in the analysis.

From the previous lecture

$$m(\dot{V}_y + V_x \Omega_z) = F_{yr} + F_{yf} \cos \delta_f + F_{xf} \sin \delta_f$$

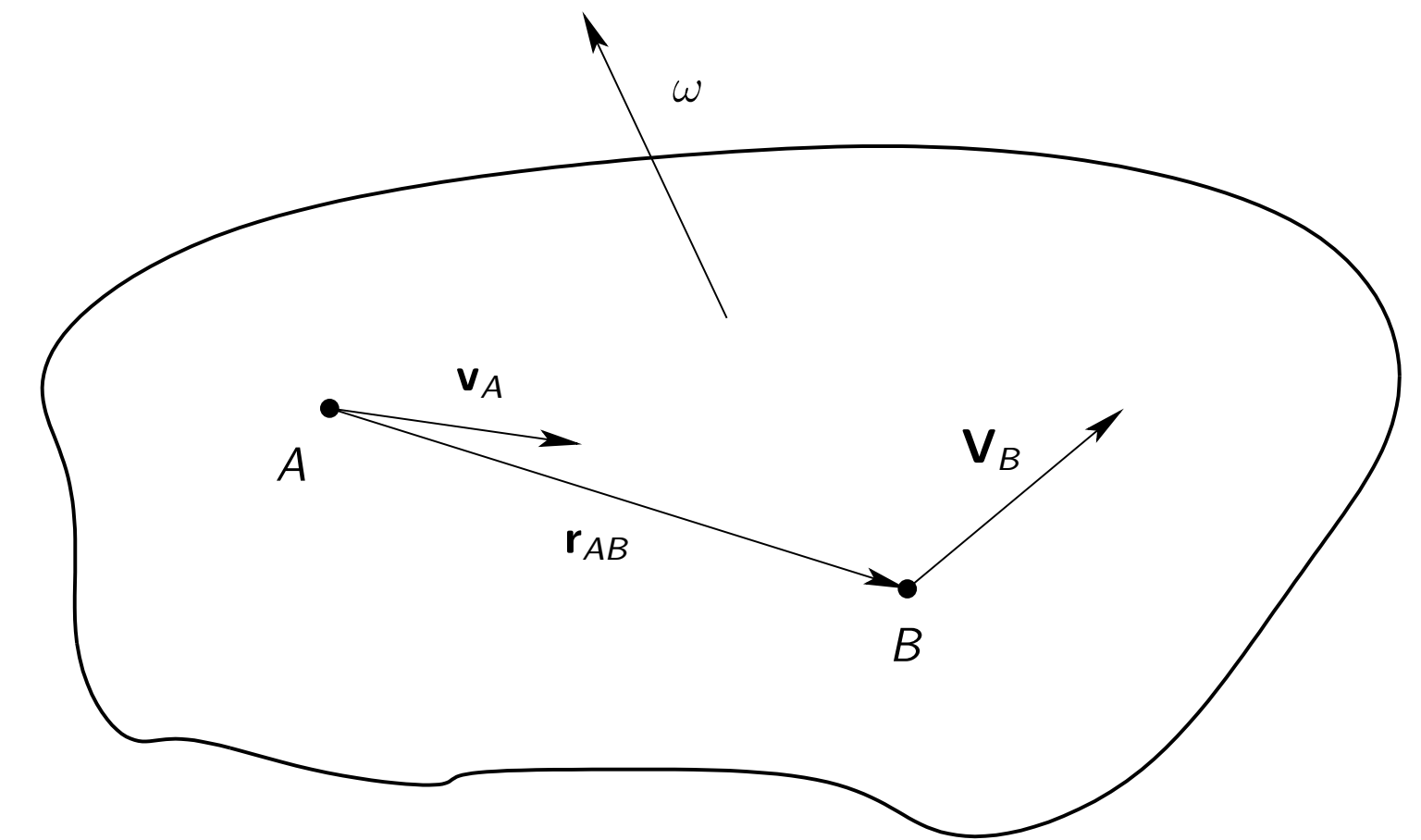
$$I_z \dot{\Omega}_z = l_1 F_{yf} \cos \delta_f - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf} \sin \delta_f$$

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \left(\delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x} \right), \quad F_{yr} = 2C_{\alpha r} \left(\frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} \right)$$

Can be rearranged

$$m \dot{V}_y + \underbrace{\left[\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_1} V_y + \underbrace{\left[mV_x + \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_2} \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + \underbrace{\left[\frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_3} V_y + \underbrace{\left[\frac{2l_1^2 C_{\alpha f} + 2l_2^2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_4} \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t)$$



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

From the previous lecture

The system

$$m\dot{V}_y + \underbrace{\left[\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_1} V_y + \underbrace{\left[mV_x + \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_2} \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + \underbrace{\left[\frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_3} V_y + \underbrace{\left[\frac{2l_1^2 C_{\alpha f} + 2l_2^2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_4} \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

can be written in matrix form

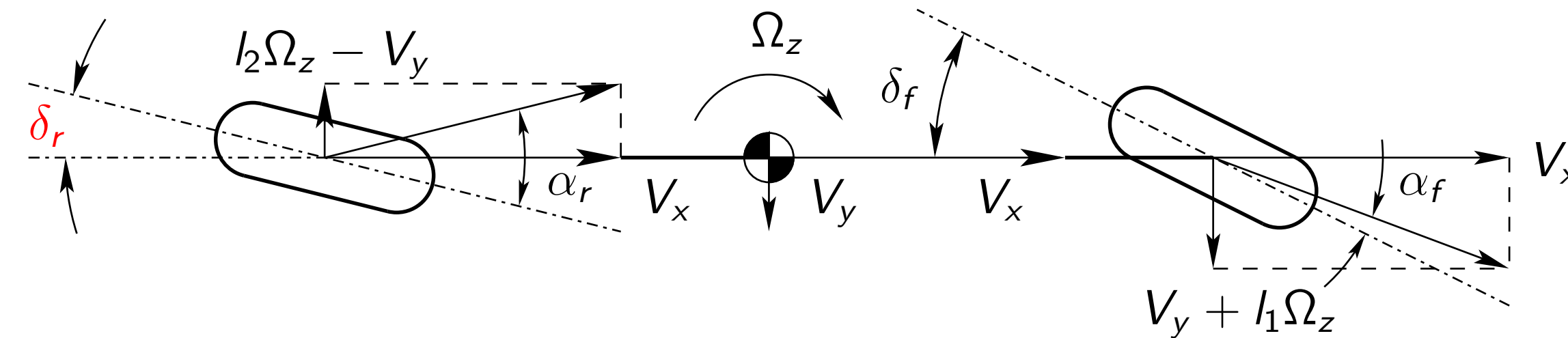
$$M\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}(t)$$

where

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \delta_f(t) \\ 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t) \end{bmatrix}$$

4WS: Equations of Motion

Now we modify the model and add rear-wheel steering with the steer angle δ_r :



Kinematics from the figure

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x}$$

$$\alpha_r = \frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} + \delta_r$$

The differences from the previous lecture are colored red

4WS: Equations of Motion

Now we get

$$m(\dot{V}_y + V_x \Omega_z) = F_{yr} + F_{yf} \cos \delta_f + F_{xf} \sin \delta_f$$

$$I_z \dot{\Omega}_z = l_1 F_{yf} \cos \delta_f - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf} \sin \delta_f$$

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \left(\delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x} \right), \quad F_{yr} = 2C_{\alpha r} \left(\frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} + \delta_r \right)$$

Can be rearranged:

$$m\dot{V}_y + a_1 V_y + a_2 \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f + 2C_{\alpha r} \delta_r$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + a_3 V_y + a_4 \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t) - 2l_2 C_{\alpha r} \delta_r$$

Step responses

Now we shall study some step responses for the system

$$M\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}_f\delta_f(t) + \mathbf{u}_r\delta_r(t)$$

where

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1C_{\alpha f} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2C_{\alpha r} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

By taking the Laplace transform we get

$$(sM + A)X = \mathbf{u}_f\delta_f(s) + \mathbf{u}_r\delta_r(s)$$

Transfer functions

The next step is to study the transfer functions for the system. It follows from

$$(sM + A)X = \mathbf{u}_f \delta_f(s) + \mathbf{u}_r \delta_r(s)$$

that

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ms + a_1 & a_2 \\ a_3 & I_z s + a_4 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r \right) \end{aligned}$$

where

$$\Delta = \det(sM + A) = I_z ms^2 + (I_z a_1 + ma_4)s + (a_1 a_4 - a_2 a_3)$$

is the determinant.

Step Response I

The transfer functions from δ_r to V_y and Ω_z

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y(s) \\ \Omega_z(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & m s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_1 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r(s) \\ &= \frac{2C_{\alpha r}}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 + l_1 a_2 \\ -a_3 - l_1 m s - a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_r(s) = \begin{bmatrix} G_{yr}(s) \\ G_{zr}(s) \end{bmatrix} \delta_r(s) \end{aligned}$$

Consider a step in the rear steer angle, i.e., $\delta_r(s) = 1/s$.

The immediate response in the lateral acceleration at the center of gravity is then

$$\begin{aligned} \dot{V}_y + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sV_y + V_x \Omega_z) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sG_{yr} + V_x G_{zr}) \delta_r \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2C_{\alpha r} I_z s^2 + (\dots)s + (\dots)}{I_z m s^2 + (\dots)s + (\dots)} \frac{1}{s} = \frac{2C_{\alpha r}}{m} > 0 \end{aligned}$$

where we used the initial value theorem $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$.

Step response II

The transfer functions from δ_r to V_y and Ω_z

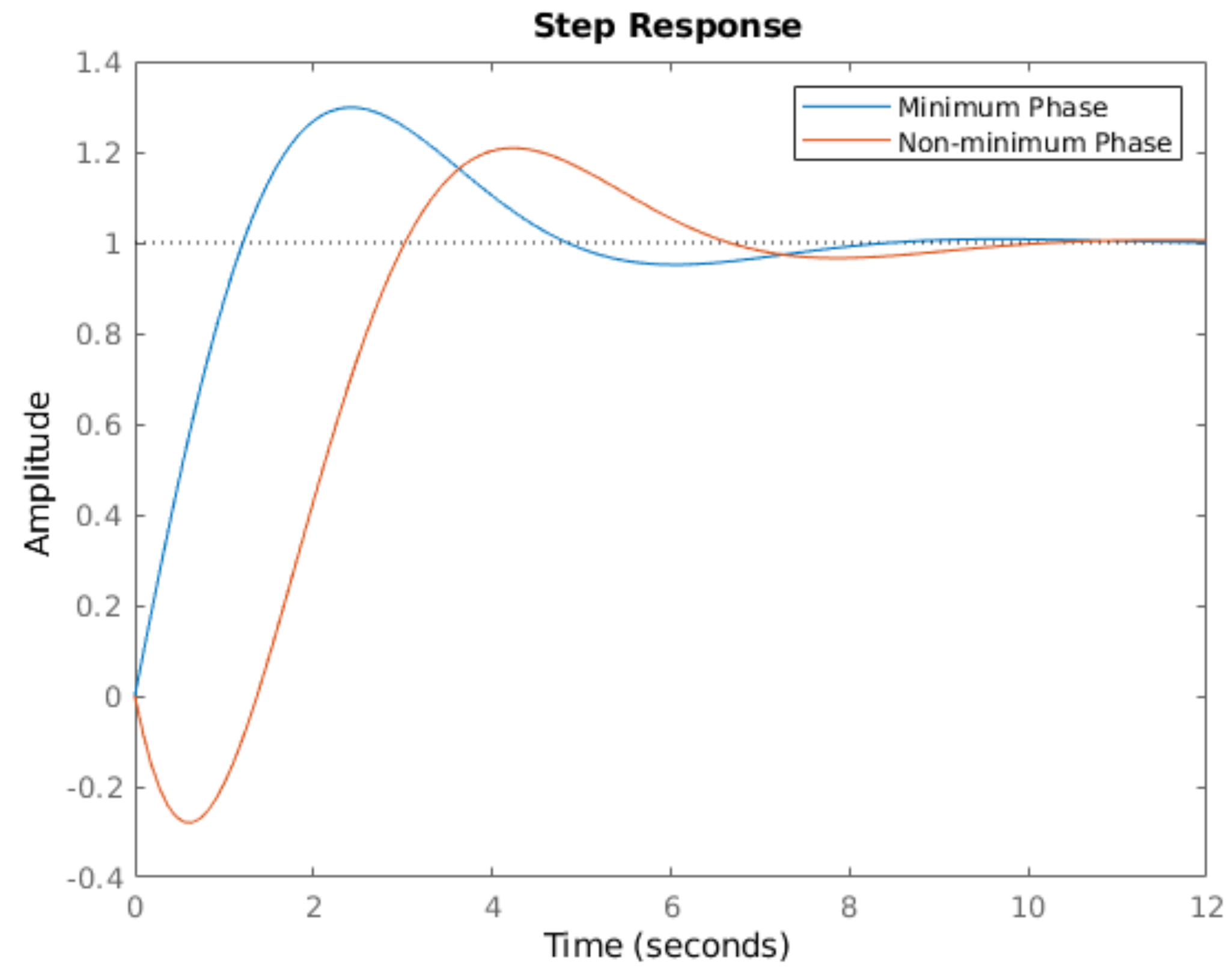
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y(s) \\ \Omega_z(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & m s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_1 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r(s) \\ &= \frac{2C_{\alpha r}}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 + l_1 a_2 \\ -a_3 - l_1 m s - a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_r(s) = \begin{bmatrix} G_{yr}(s) \\ G_{zr}(s) \end{bmatrix} \delta_r(s) \end{aligned}$$

Consider a step in the rear steer angle, i.e., $\delta_r(s) = 1/s$. The limit value, as t tends to infinity, of the lateral acceleration at the center of gravity is then

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_y + V_x \Omega_z &= \lim_{s \rightarrow 0} s(sV_y + V_x \Omega_z) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sG_{yr} + V_x G_{zr}) \delta_r \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\dots)s^2 + (\dots)s - 2V_x C_{\alpha r} (a_1 l_1 + a_3)}{(\dots)s^2 + (\dots)s + (a_1 a_4 - a_2 a_3)} \frac{1}{s} = - \frac{2V_x C_{\alpha r} (a_1 l_1 + a_3)}{a_1 a_4 - a_2 a_3} < 0 \end{aligned}$$

where we used the final value theorem $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$.

Non-minimum phase



Step response III

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f \\ &= \frac{2C_{\alpha f}}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 - l_1 a_2 \\ -a_3 + l_1 ms + a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_f \end{aligned}$$

Consider a step in the front steer angle, i.e., $\delta_f(s) = 1/s$.

The immediate response in the lateral acceleration at the rear axle is then

$$\begin{aligned} \dot{V}_y + V_x \Omega_z - l_2 \dot{\Omega}_z \Big|_{t=0^+} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sV_y - l_2 s \Omega_z + V_x \Omega_z) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2C_{\alpha f}(I_z - ml_1 l_2)s^2 + (\dots)s + (\dots)}{I_z ms^2 + (\dots)s + (\dots)} = \frac{2C_{\alpha f}(I_z - ml_1 l_2)}{I_z m} \end{aligned}$$

where we used the initial value theorem $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$.

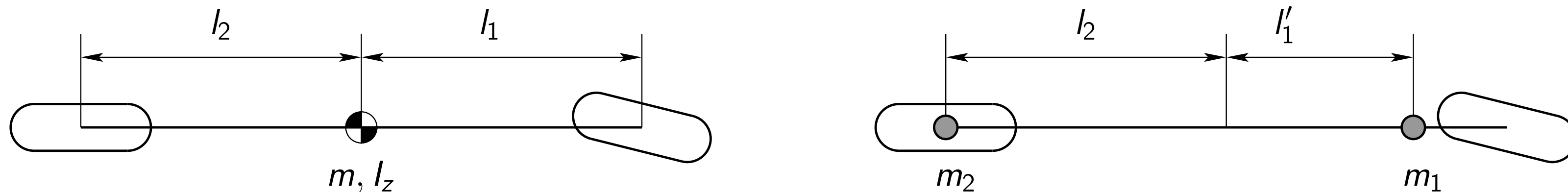
Interpretation of the third step response

The immediate step response can be rewritten as

$$\dot{V}_y - l_2 \dot{\Omega}_z + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} = \frac{2C_{\alpha f}(I_z - ml_1 l_2)}{I_z m} = \frac{2C_{\alpha f} ml_2 (l'_1 - l_1)}{I_z m}$$

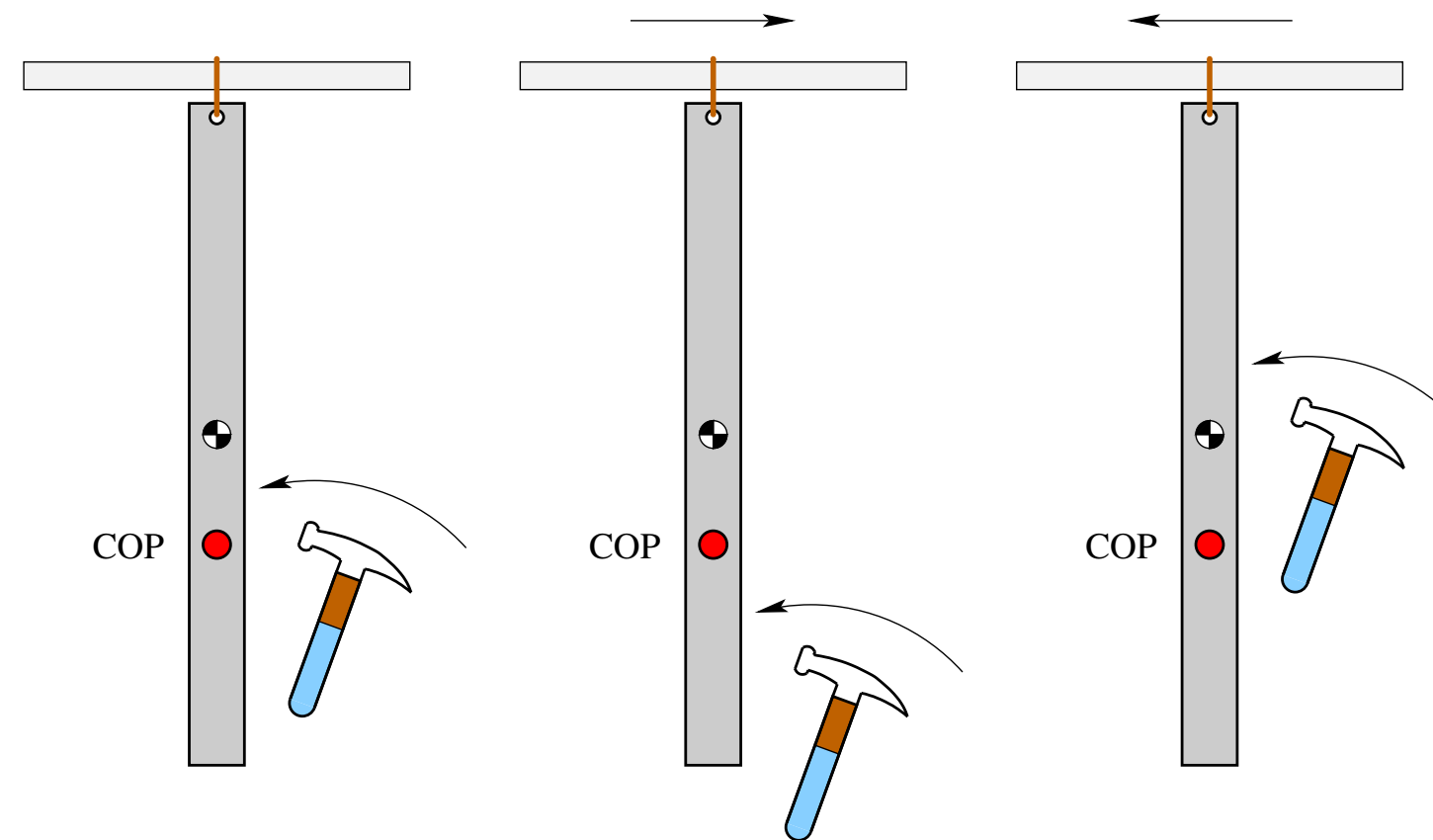
where we have introduced the length $l'_1 = I_z / (ml_2)$.

The system is equivalent to a system with a point mass $m_1 = ml_2 / (l'_1 + l_2)$ located at the distance l'_1 in front of the center of gravity, and a point mass $m_2 = ml'_1 / (l'_1 + l_2)$ located at the rear axle.



Interpretation of the third step response

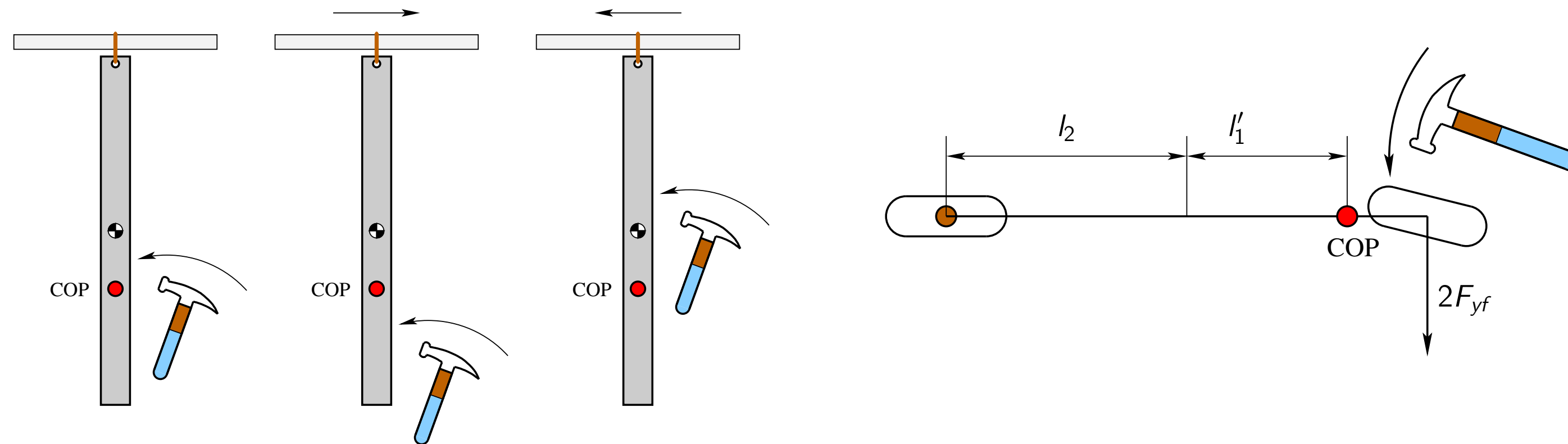
Consider a hanging beam being hit by a hammer:



Depending on where you hit it, the top of the beam will move in different directions. The limit case when the top doesn't move at all is when you hit it at the center of percussion (COP in the figure). For a uniform beam the distance to (COP) from the top is $2/3$ of the length of the beam.

Interpretation of the third step response

If the suspension point is the rear axle, then the center of percussion is located at the mass m_1 in the figure:



This explains the sign of the initial acceleration at the rear axle:

$$\dot{V}_y - l_2 \dot{\Omega}_z + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} = \frac{2C_{\alpha f}(I_z - ml_1 l_2)}{I_z m} = \frac{2C_{\alpha f} m l_2 (l'_1 - l_1)}{I_z m}$$